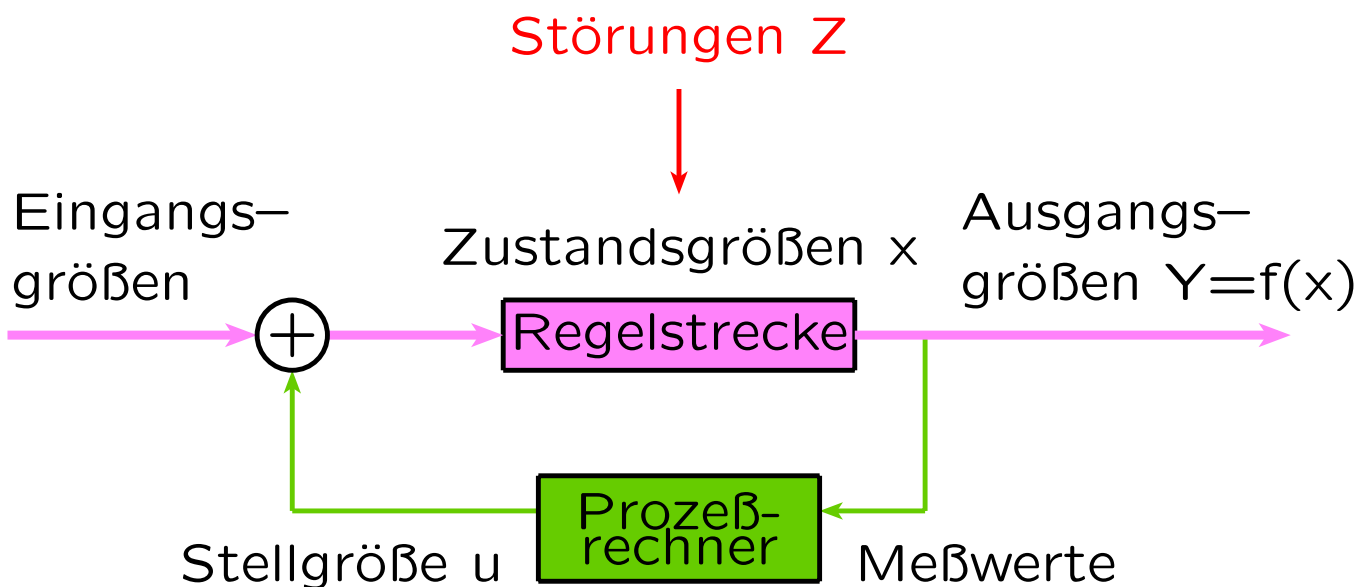


7 Regelungstechnik

7.1 Einführung

- Die Führung technischer Prozesse kombiniert Planung, Steuerung und Regelung
 - ★ **Steuerung**
Einwirkung mittels Stellgrößen in eine gewünschte vorausgeplante Richtung.
Beispiel: Heizung um 6:30 Uhr einschalten.
 - ★ **Regelung**
Überwachung und Minimierung der Abweichungen zwischen Ist- und Sollwerten nach gegebenen Kriterien.
Beispiel: Kesseltemperatur auf 43 Grad halten.
- System als Schachtelung von Regelschleifen abgestufter Reaktionsfähigkeit betrachtbar
 - ★ höhere Ebenen bzw. äußere Schleifen
 - Zeitanforderungen unkritisch (bis zu Tagen)
 - relativ große Abweichungen erlaubt

- Realisierung in Software
- Beispiel: Bestände in Materiallager
- ★ niedrigere Ebenen bzw. innere Schleifen
 - kritische Zeitanforderungen (z.B. msec)
 - nur geringe Abweichungen erlaubt
 - Realisierung in HW
 - Beispiel: Temperatur auf 0.1 Grad halten
- Beispiel: Der Prozeßrechner als Regler

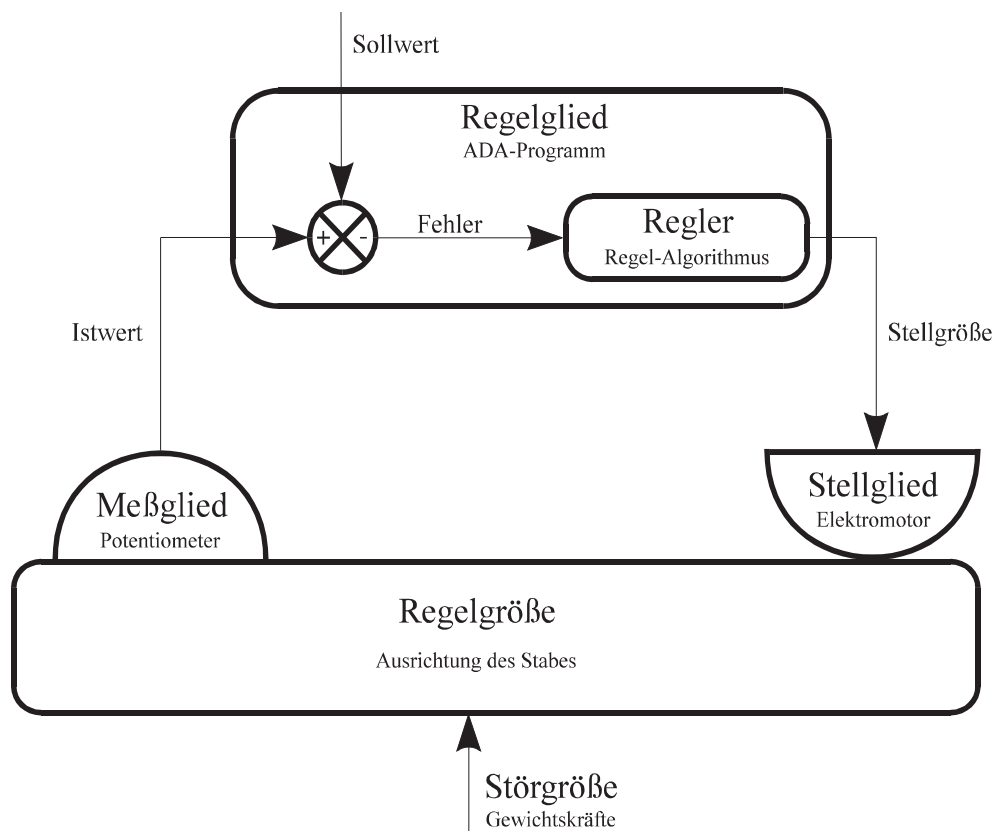


- Ziele
 - ★ Stellgröße u so wählen, daß Istwerte Y mit den vorgegebenen Sollwerten möglichst gut übereinstimmen
 - ★ gezielte Nachführung bei Störungen und neuen Vorgaben

- **Mögliche Kriterien**

- ★ Abweichung möglichst schnell gegen Null
- ★ Abweichung überschreitet nicht eine bestimmte Bandbreite
- ★ kein Schwingen
- ★ Integral über den Abweichungsbetrag wird über die Zeit minimiert
- ★ energiesparende Nachführung
- ★ technisch gut realisierbar (z.B. bei Temperaturkonstanz keine überdimensionale Heiz- und Kühlleistung gegenüber im Mittel benötigte)

7.2 Einfache Regler

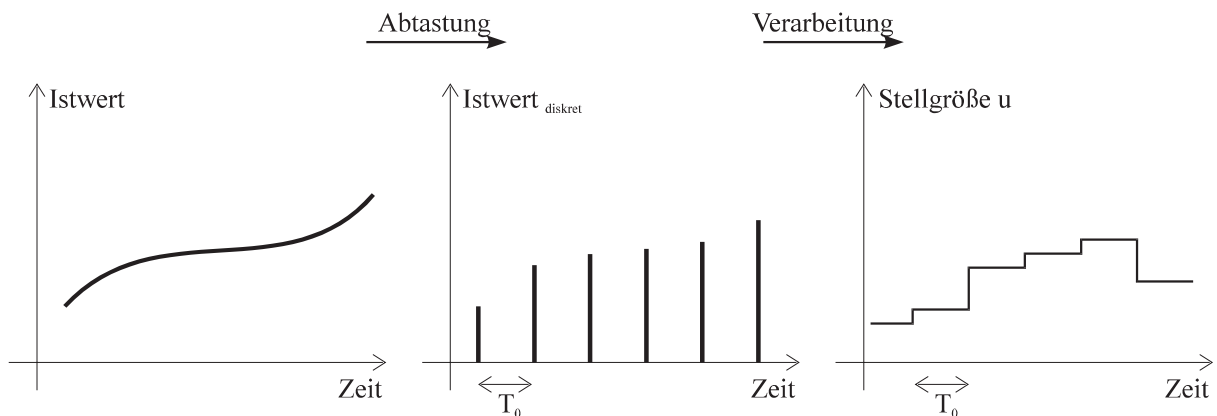


7.2.1 Der P-Regler

- einfachster Regler
- proportionales Verhalten
- Die Gleichung eines P-Reglers

$$u(t) = K * e(t)$$

- Diskretisierung: kontinuierliche Istwerte der Regelgröße abgetastet und digitalisiert.
- diskrete Istwerte, die nach der Amplitude und nach der Zeit quantisiert sind.
- Abtastung periodisch mit der Abtastzeit T_0
- berechnete Stellgröße u ist über den Zeitraum T_0 konstant



$$u(k) = K * e(k)$$

mit $u(k)$ Stellgröße zum Zeitpunkt k
 K Verstärkungsfaktor
 $e(k)$ Fehler = (Sollwert-Istwert)
zum Zeitpunkt k

Vorteile:

- Einfache Implementierung möglich, da der Algorithmus nur den momentanen Fehler $e(k)$ benötigt und keine äquidistanten Zeitpunkte k erfordert
- Einfache Parameter-Bestimmung

Nachteil:

- Störgrößen werden nicht restlos ausgeregelt, es bleibt immer die sogenannte P-Abweichung

7.2.2 Der PI-Regler

- P-Regler mit überlagertem Integral-Anteil
- Gleichung eines PI-Reglers für kontinuierliche Signale:

$$u(t) = K * (e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau)$$

nach DIN 19226 mit T_I Integrierzeit
(Nachstellzeit)

- für digitale Regelung Gleichung diskretisieren
- für kleine Abtastzeiten T_0 die kontinuierliche Integration durch Rechteck-Integration annähern
- diskretisierte PI-Gleichung:

$$u(k) = K * (e(k) + \frac{T_0}{T_I} \sum_{i=0}^{k-1} e(i))$$

Vorteil:

- Durch I-Anteil keine bleibende Regelabweichung

Nachteile:

- Zeitaufwendige Parameter-Bestimmung
- Einschwingen auf Sollwert
- zeitlich äquidistanten Abtastung notwendig (bei Feldbussen z.B. mit SERCOS, INTERBUS-S garantiert)

7.2.3 Der PID-Regler

- PI-Regler mit überlagertem Differential-Anteil
- Gleichung eines PI-Reglers für kontinuierliche Signale:

$$u(t) = K * (e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt})$$

nach DIN 19226 mit T_D Differenzierzeit (Vorhaltzeit)

- Um den D-Anteil zu diskretisieren, ersetzt man den Differentialquotienten durch eine Differenz erster Ordnung.
- diskretisierte PID-Gleichung („Stellungsform“):

$$u(k) = K * (e(k) + \frac{T_0}{T_I} \sum_{i=0}^{k-1} e(i) + \frac{T_D}{T_0} (e(k) - e(k-1)))$$

- Subtrahiert man von dieser Gleichung $u(k-1)$ erhält man die „Geschwindigkeitsform“

$$u(k) = u(k-1) + K * (e(k) - e(k-1) + \frac{T_0}{T_I} e(k-1) + \frac{T_D}{T_0} (e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)))$$

Vorteile:

- Durch I-Anteil keine bleibende Regelabweichung
- Schnellen Fehlerveränderungen wird durch den D-Anteil schnell entgegengewirkt

Nachteile:

- Sehr zeitaufwendige Parameter-Bestimmung
- Einschwingen auf Sollwert
- Neigung zur Instabilität

7.2.4 Auslegung der Parameter

Bei allen erwähnten Reglern ergibt sich das Problem, die Parameter der Regelgleichung (K , T_I bzw. T_D) so zu bestimmen, daß

- keine kritischen Schwingungen (Instabilität) auftreten
- der Regelkreis auch nach jeder Störung stabil bleibt
- möglichst wenig Schwingungen beim Einregeln auf den Sollwert auftreten
- Totzeiten des Stellvorgangs, Rechenzeiten und Bandbreite der Stellgrößen berücksichtigt werden
- Auslegung mittels quantitativer Berechnung eines Modells des Systems (Impulsantwort, Laplace-Transformation)
- experimentelle Verfahren zur Parameter-Optimierung (Takahashi)

7.3 Explizites Rechenbeispiel für PID-Regler

- Erläuterungen
 - ★ Berechnung mit dem Algebra-System MapleV
 - ★ Eingaben entsprechen einer Programmiersprache, wobei Wertezuweisungen wie in Pascal mit := bezeichnet
 - ★ Eingabezeilen in roter Schrift mit > eingeleitet
 - ★ Ausgabe in blauer Schrift
 - ★ Kommentare in schwarzer Schrift
- DGL 2. Ordnung als Regelstrecke

Protokoll der MAPLE-Sitzung:

PID-Regler fuer ein System, das durch eine lineare DGL 2. Ordnung beschrieben wird
eine zusätzlich benötigte Standardprozedur

```
> readlib(unassign);
```

```
proc() ... end
```

1. Differentialgleichung

$u(t)$ ist die Stellgrösse des Reglers und k die Rueckfuehrkonstante (Einfluss der Stellgrösse auf den Prozess), x_{soll} ist der Sollwert

$$\begin{aligned} > \text{dgl1} := \text{diff}(\text{diff}(x(t), t), t) + a * \text{diff}(x(t), t) \\ & \quad + b * x(t) + c + k * u(t) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dgl1} := & \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} x(t) \right) + a \left(\frac{\partial}{\partial t} x(t) \right) + b x(t) \\ & + c + k u(t) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} > u(t) := & k_p * (x(t) - x_{soll}) + k_d * \text{diff}(x(t), t) \\ & + k_i * \text{int}(x(z) - x_{soll}, z=0..t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(t) := & k_p (x(t) - x_{soll}) + k_d \left(\frac{\partial}{\partial t} x(t) \right) \\ & + k_i \int_0^t x(z) - x_{soll} dz \end{aligned}$$

Als neue Variable wird die Grösse $y(t) = x(t) - x_{soll}$ eingefuehrt

$$\begin{aligned} > x(t) := & y(t) + x_{soll}; \\ & x(t) := y(t) + x_{soll} \end{aligned}$$

dann ergibt sich die DGL

> `simplify(dgl1);`

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(t) \right) + a \left(\frac{\partial}{\partial t} y(t) \right) + b y(t) + b x_{soll} \\ & + c + k k_p y(t) + k k_d \left(\frac{\partial}{\partial t} y(t) \right) \\ & + k k_i \int_0^t x(z) - x_{soll} dz = 0 \end{aligned}$$

fasst man gleiche Terme zusammen und setzt

> `abk:= A=a+k*kd, B=b+k*kp,`
`C=c+b*xsoll, KI=k*ki;`

$$\begin{aligned} abk & := A = a + k k_d, B = b + k k_p, \\ C & = c + b x_{soll}, KI = k k_i \end{aligned}$$

dann ergibt sich die DGL

> `dgl2:=diff(diff(y(t),t),t)+A*diff(y(t),t)`
`+B*y(t)+C+KI*int(y(z),z=0..t)= 0;`

$$\begin{aligned} dgl2 & := \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(t) \right) + A \left(\frac{\partial}{\partial t} y(t) \right) + B y(t) \\ & + C + KI \int_0^t y(z) dz = 0 \end{aligned}$$

Anmerkung: A und B koennen durch kd und kp beeinflusst werden, C ist durch den Prozess vorgegeben, KI ist nur bei einem Integralteil des Reglers ungleich Null

2. Loesung bei $KI = 0$

> $KI:=0;$

$KI := 0$

> $LOES1:= dsolve(dgl2,y(t));$

$$LOES1 := y(t) = -\frac{C}{B} + _C1 e^{\left(-1/2 \left(A - \sqrt{A^2 - 4B}\right) t\right)} + _C2 e^{\left(-1/2 \left(A + \sqrt{A^2 - 4B}\right) t\right)}$$

Eigenschaften: $_C1$ und $_C2$ sind freie Parameter, die z.B. aus den Anfangswerten bestimmt werden.

Fuer eine stationaere Loesung muss gelten: A positiv (je groesser A ist, desto schneller konvergiert die Loesung) B so waehlen, dass die

Wurzel nahe Null ist, jedenfalls deutlich kleiner als A (falls $A^2 - 4B$ negativ, dann wird die Wurzel imaginär, es kommt zu Schwingungen)

Schlussfolgerung: Da zwei Werte eingestellt werden müssen, ist der gewünschte Verlauf nur mit einem PD-Regler erreichbar. Ein P-Regler nimmt keinen Einfluss auf den A-Wert. Eine Regelung wäre dann nur für die Prozesse möglich, bei denen A schon einen geeigneten Wert hat

3. Beispiele für $KI = 0$

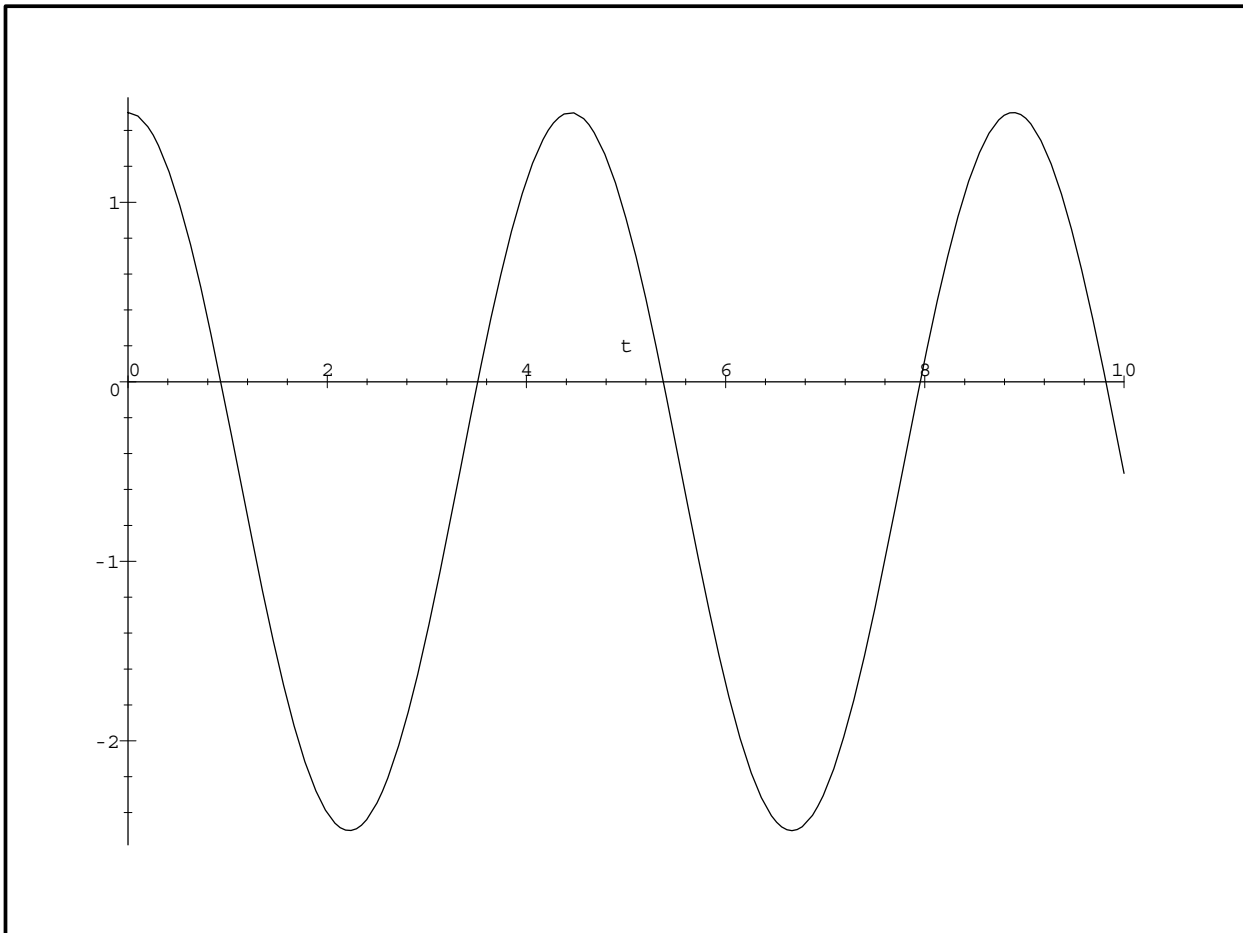
```
> _C1:= 1; _C2:= 1;  
    _C1 := 1  
    _C2 := 1
```

```
> C:= 1;  
    C := 1
```

```
> B:= 2;  
    B := 2
```

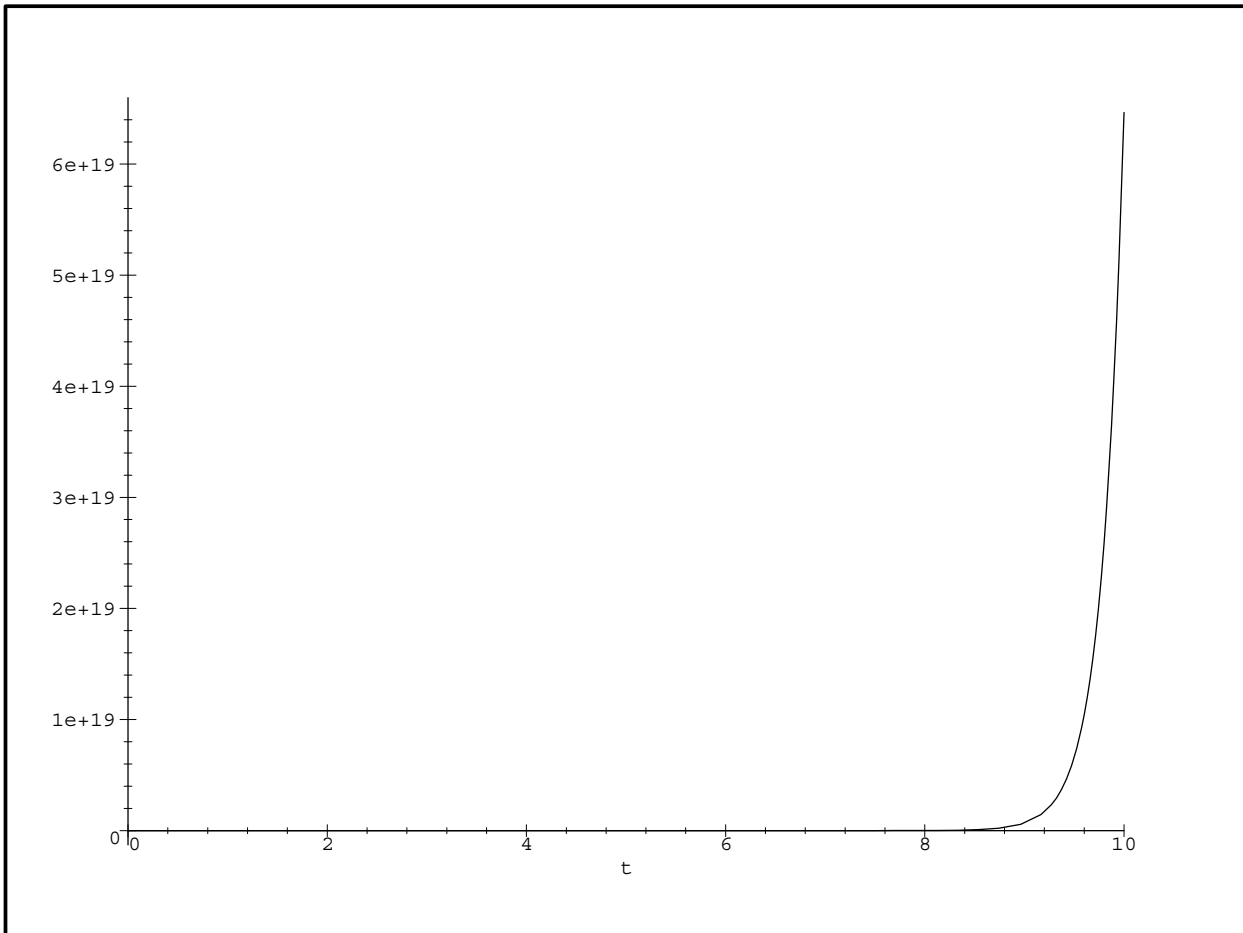
```
> A:=0;plot(op(2,LOES1),t=0..10);
```

```
A := 0
```



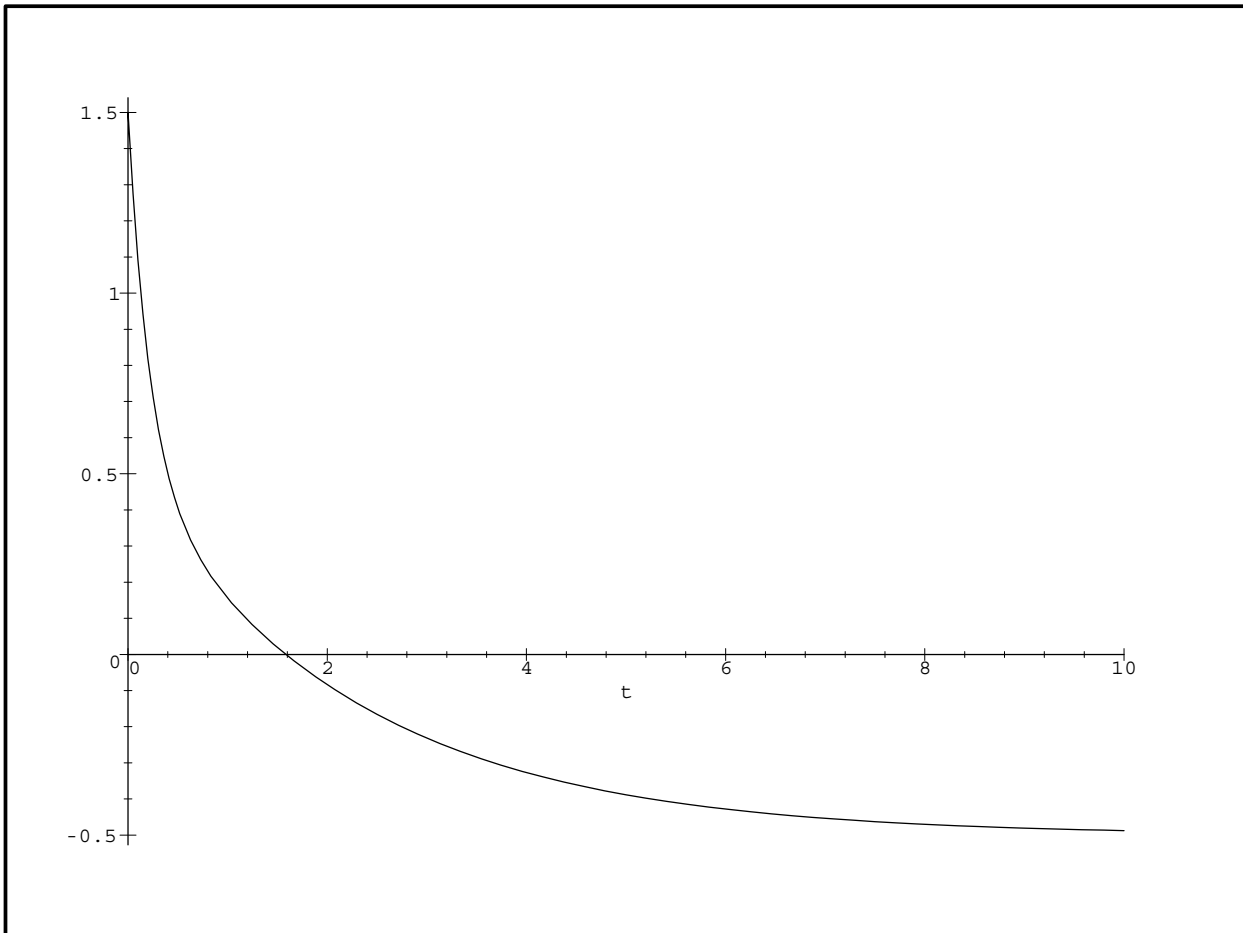

```
> A:=-5;plot(op(2,LOES1),t=0..10);
```

```
A := -5
```



```
> A:=5;plot(op(2,LOES1),t=0..10);
```

```
A := 5
```



in diesem Fall gibt es eine stationaere Loesung $y \rightarrow -C/B = -0.5$ die stationaere Loesung ist aber nicht der Sollwert!!

4. Gleichungen fuer KI ungleich Null

> `unassign('KI','A','B','C');`

Die Differentialgleichung kann dann ebenfalls mit dem Ansatz $y(t)=f(C)*\exp(-\lambda*t)$ geloest werden. Es ergibt sich:

> `LOES2:= dsolve(dgl2,y(t),laplace);`

$$LOES2 := y(t) = \sum_{_r=\%1} (-r^2 y(0) + D(y)(0) _r + A _r y(0) - C) e^{(-rt)} / (3 _r^2 + 2 A _r + B)$$
$$\%1 := \text{RootOf}(-Z^3 + A _Z^2 + B _Z + KI)$$

Man sieht, dass eine Summe ueber e-Funktionen vorliegt, wobei $_r$ die Wurzeln der folgenden Gleichung $gl2$ sind:

> `gl2:= z^3+A*z^2+B*z+KI=0;`

$$gl2 := z^3 + A z^2 + B z + KI = 0$$

A, B und KI müssen so bestimmt werden, dass der Realteil dieser Wurzeln immer größer Null ist, dann konvergiert die Lösung immer gegen Null, d.h. den Sollwert für den Prozess, da $y(t) = x(t) - x_{\text{soll}}$. In die Wurzeln geht die Konstante C nicht ein. Aus den gewünschten Wurzeln lassen sich rückwärts k_d , k_p und k_i berechnen.

> solve(gl2,z);

$$\begin{aligned} & \%1^{1/3} - \%2 - \frac{1}{3} A, -\frac{1}{2} \%1^{1/3} + \frac{1}{2} \%2 - \frac{1}{3} A \\ & + \frac{1}{2} I \sqrt{3} (\%1^{1/3} + \%2), -\frac{1}{2} \%1^{1/3} \\ & + \frac{1}{2} \%2 - \frac{1}{3} A \\ & - \frac{1}{2} I \sqrt{3} (\%1^{1/3} + \%2) \\ \%1 & := \frac{1}{6} B A - \frac{1}{2} K I - \frac{1}{27} A^3 + \frac{1}{18} (12 B^3 \\ & - 3 B^2 A^2 - 54 B A K I + 81 K I^2 \\ & + 12 K I A^3)^{1/2} \\ \%2 & := \frac{\frac{1}{3} B - \frac{1}{9} A^2}{\%1^{1/3}} \end{aligned}$$

Die Wurzeln haben also die Form rw_0 , $rw_{\pm I * iw}$

Man kann die drei Werte rw_0 , rw und iw vorgeben, daraus A , B und KI bestimmen und daraus wiederum kd , kp und ki .

5. Beispiele fuer KI ungleich Null

wir setzen (ohne prinzipielle Einschränkungen der Loesungen)

> $y(0) := 0$; $D(y)(0) := 0$; $C := 1$;

$y(0) := 0$

$D(y)(0) := 0$

$C := 1$

> $A := 2$; $B := 3$; $KI := 2$; $\text{evalf}(\text{solve}(\text{gl2}, z))$;

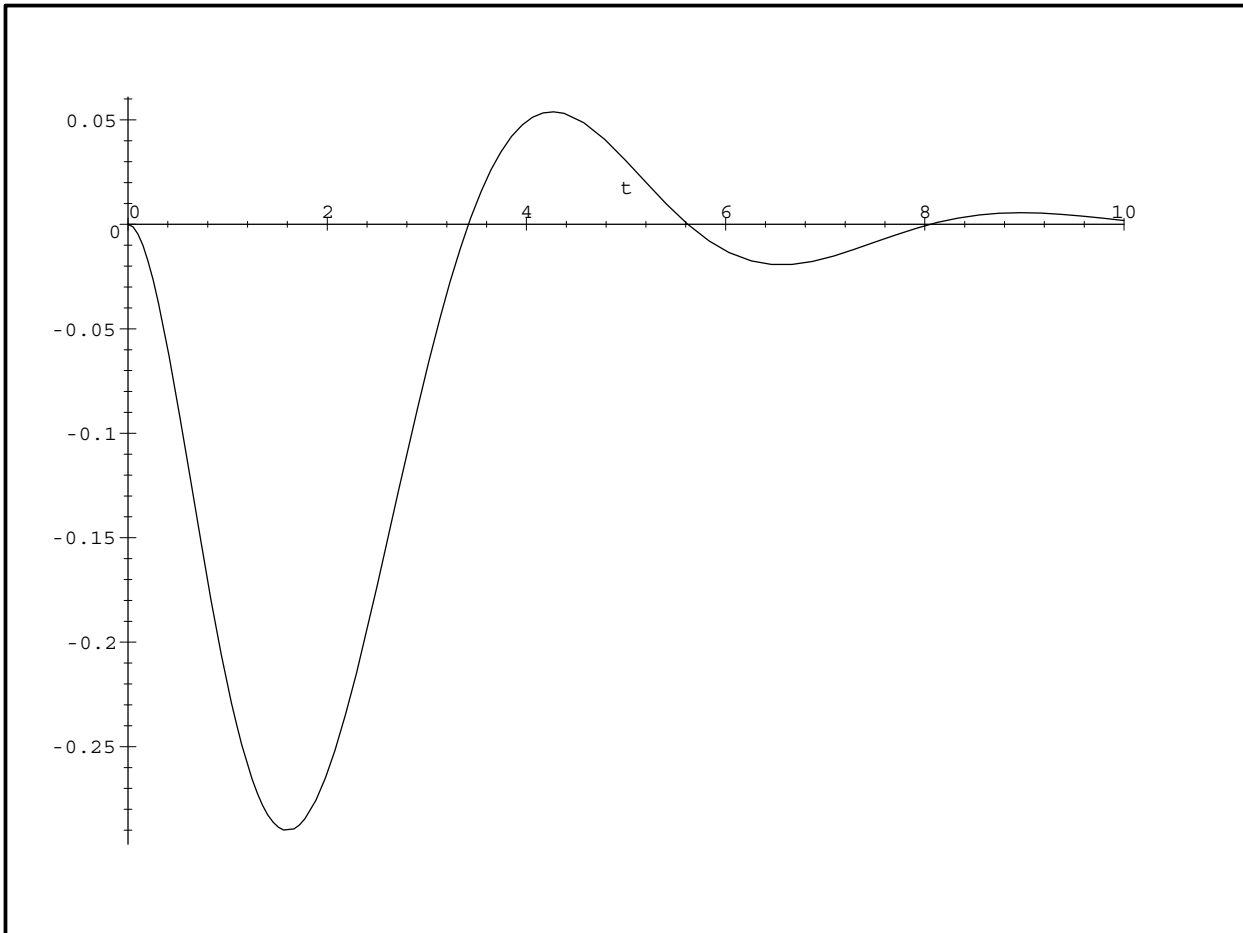
$A := 2$

$B := 3$

$KI := 2$

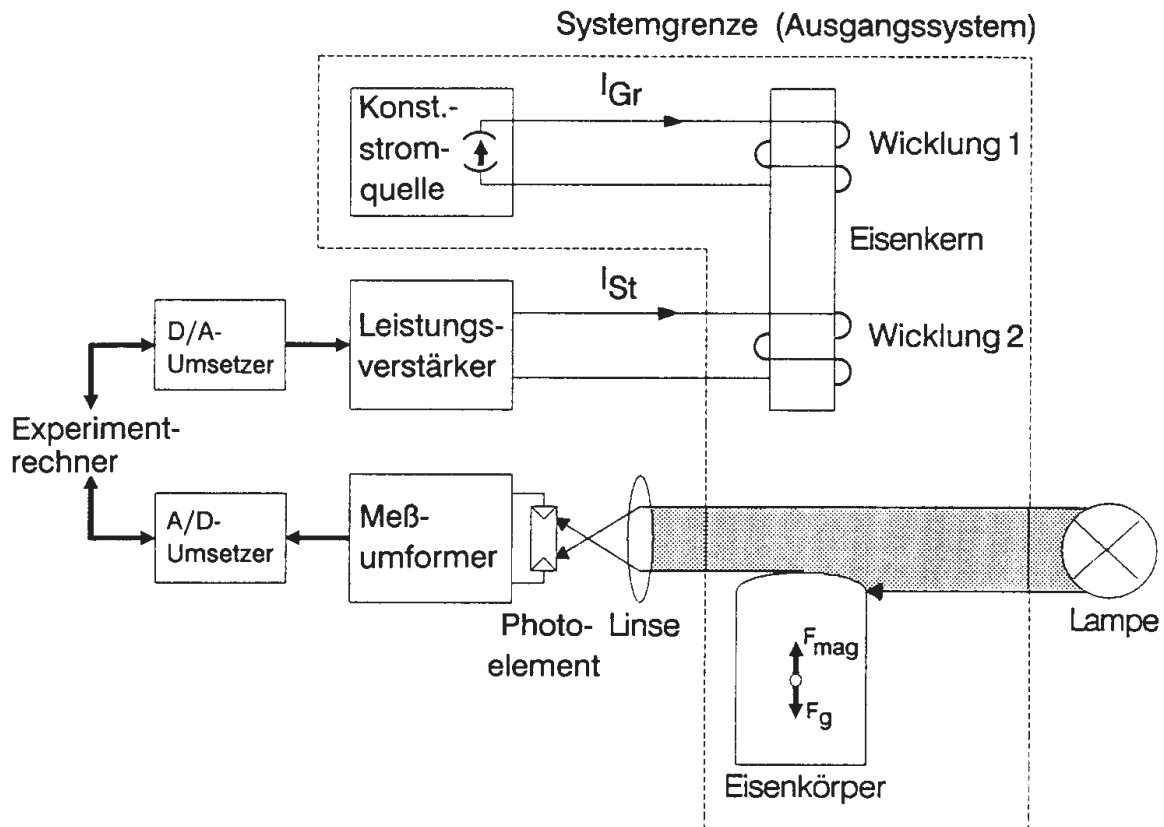
$-1., -0.5000000000 + 1.322875656 I,$
 $-0.5000000000 - 1.322875656 I$

```
> plot(op(2,LOES2),t=0..10);
```



Dies ist also ein Satz von Parametern mit stationaerer Loesung

7.3.1 Beispiel: Magnetisch aufgehängter Schwebekörper



Systemgleichung:

$$m \cdot \ddot{x} = F_{mag} - F_g;$$

Entwicklung um den Betriebspunkt:

$$m \cdot \ddot{x} = f_0 I_{Gr} + I_{St} + f_2 x - mg;$$

$$m \cdot \ddot{x} + p_1 \cdot \dot{x} + p_2 \cdot x = k I_{St}$$

Explizite Berechnung der Lösung mit Maple V

7.4 Lineare Rückführregelung

- zu regelnder Prozeß durch gekoppeltes System linearer zeitinvarianter homogener Differentialgleichungen beschrieben
- ★ ohne Regelkreis

$$dx/dt = A * x$$

wobei

x: (n)-Vektor der Zustandsvariablen
A: ($n \times n$)-Matrix (konstant)

- ★ mit Regelkreis

$$dx/dt = A * x + B * u$$

wobei

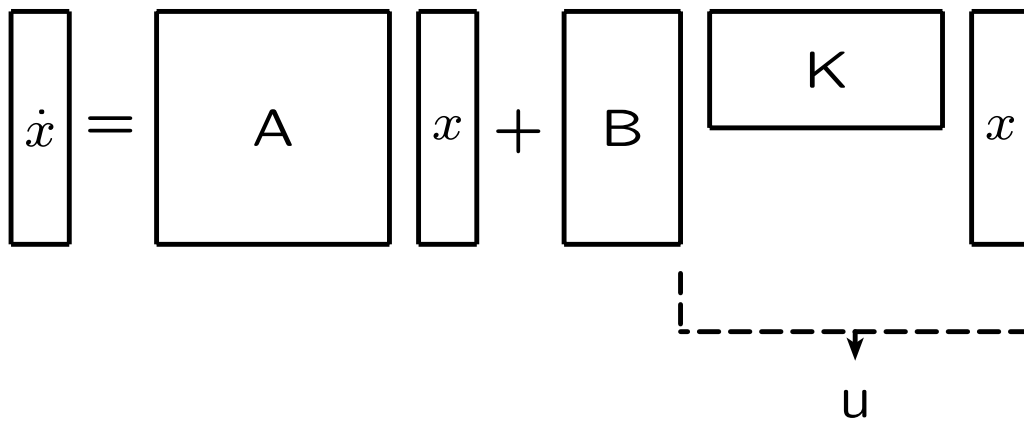
B: ($n \times m$)-Matrix der Stellkoeffizienten
(gegeben durch techn. Prozeß)
u: (m)-Vektor der Stellgrößen

- ★ Lineare Rückführregelung

$$u = -K * x$$

wobei

K: ($m \times n$)-Matrix von zu bestimmenden Koeffizienten



- Matrix K so bestimmen, daß Regelungsziel und Nebenbedingungen erfüllt
- Durch Regelung ergibt sich die DGL

$$dx/dt = Ax + B(-Kx) = (A - BK)x$$

- Differentialgleichung hat also durch Einfluß des Reglers neue Eigenwerte
- **Lösungsansatz** bei linearen DGL

$$x(t) = x_0 * e^{\lambda * t}$$

x_0 ist ein konstanter Vektor, der von den Anfangswerten abhängt

λ ist aus der obigen DGL durch Einsetzen des Lösungsansatzes zu bestimmen

- Lösungsschritte

- ★ eingesetzt

$$\lambda * x_0 * e^{\lambda t} = (A - BK) * x_0 * e^{\lambda t}$$

- ★ daraus lineares Gleichungssystem für x_0

$$(A - BK - \lambda I) * x_0 = 0$$

- ★ Lösungen für $x_0 \neq 0$ nur, falls Determinante des Gleichungssystems Null, also Forderung:

$$|(A - BK - \lambda I)| = 0$$

- ★ Daraus Bestimmung der Eigenwerte λ_i , mit $i = 1, \dots, n$

- ★ λ_i i.a. komplexe Zahl, bestehend aus Real- und Imaginärteil

- Lösung

- ★ Durch Addition der verschiedenen Teil-Lösungen

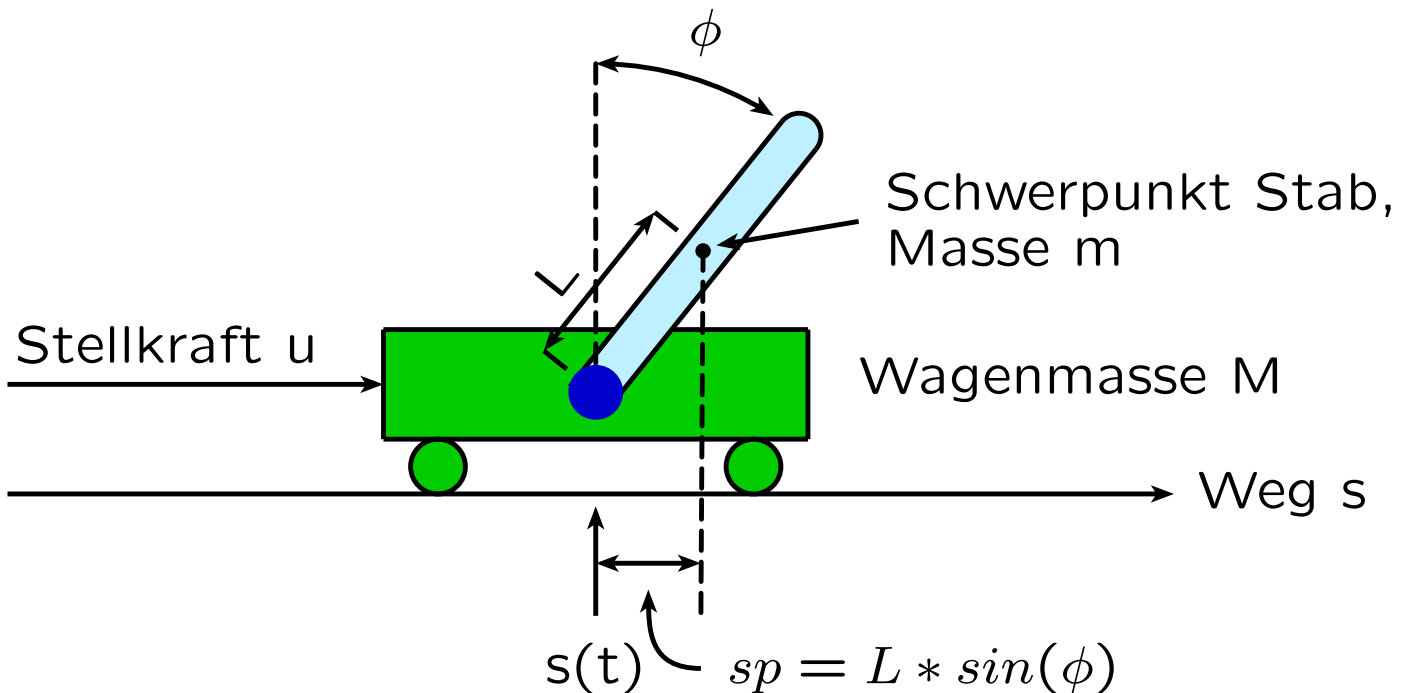
$$x(t) = \sum_{i=1}^n x_{0i} * e^{\lambda_i * t}$$

- ★ x_{0i} aus den Anfangswerten

- ★ Fall 1: $\exists i : \Re(\lambda_i) > 0$
keine stabile (stationäre) Lösung
- ★ Fall 2: $\forall i : \Re(\lambda_i) < 0$:
stabil, stationäre Lösung
- ★ Fall 3: $\forall i : \Re(\lambda_i) = 0$:
periodische Schwingungen
- ★ Spezialfall: $\forall i : \Re(\lambda_i) < 0 \wedge \Im(\lambda_i) = 0$:
stabil, asymptotische Näherung an den
stationären Zustand
- Forderungen an Regler
 - ★ K so bestimmen, daß Fall 2 vorliegt
 - ★ $|\Re(\lambda_i)|$ sollte möglichst groß sein
 - ★ $|\Im(\lambda_i)|$ sollte möglichst klein sein
 - ★ die Lösung sollte auch noch bei kleinen
Störgrößen Z stabil bleiben

7.5 Anwendungsbeispiel: Balancierter Stab

- Klassisches Beispiel zur Demonstration von Regelungsalgorithmen



- Ausgangsgleichungen

$$(M + m) * \ddot{s} = \langle \text{Kräfte} \rangle$$

$$\theta * \ddot{\phi} = \langle \text{Drehmomente} \rangle$$

wobei $\theta = m * L^2/3$ das Trägheitsmoment des Stabes ist

Es ergeben sich 4 Gleichungen (nach Ackermann)

(1) Horizontalbewegung des Stabschwerpunktes

$$m * \frac{d^2}{dt^2}(s + L * \sin\phi) = H$$

(2) Vertikalbewegung des Stabschwerpunktes

$$m * \frac{d^2}{dt^2}(L * \cos\phi) = V - m * g$$

(3) Drehbewegung des Stabs um seinen Schwerpunkt

$$\theta * \frac{d^2\phi}{dt^2} = V * L * \sin\phi - H * L * \cos\phi$$

(4) Horizontalbewegung des Wagens

$$M * \frac{d^2s}{dt^2} = u - H$$

für die 4 Unbekannten

- ★ Horizontalkraft H des Wagens auf den Stab
- ★ Vertikalkraft V des Wagens auf den Stab
- ★ Beschleunigung \ddot{s}
- ★ Winkelbeschleunigung $\ddot{\phi}$

- Durch Linearisierung der Winkelfunktionen (kleine ϕ bzw. $\dot{\phi}$) erhält man ein lineares DGL-System. Die Koeffizienten a_{21} , a_{41} , b_2 und b_4 sind Funktionen von L , M und m .

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ s \\ \dot{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \\ s \\ \dot{s} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix} * u$$

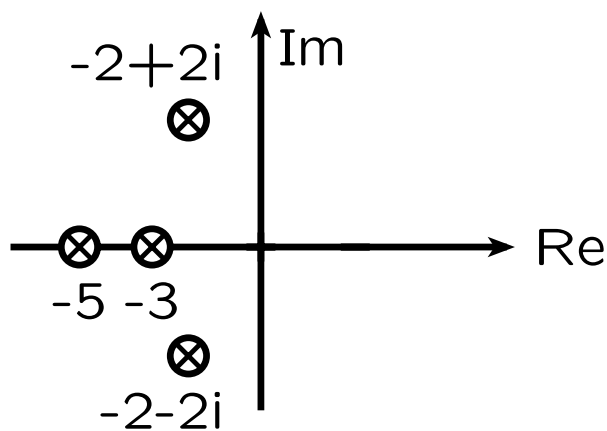
- Regelungsziel
 ϕ , $\dot{\phi}$ möglichst schnell oder mit kleiner Kraft/Arbeit gegen Null führen
- gemessen wird nur s und ϕ ; \dot{s} und $\dot{\phi}$ werden berechnet (sog. "Beobachter")
- Zahlenwerte für die Beispiele
M: 0.981 kg
m: 0.08 kg
L: 0.312 m
- Ergebnis ohne Regler, d.h. $\dot{x} = A * x + Z$
 - ★ $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -5$, $\lambda_4 = +5$
 - ★ Stab bleibt bei $Z=0$ senkrecht, falls dies Ausgangslage
 - ★ bei Störungen ($Z \neq 0$) kippt Stab (ϕ wächst unbegrenzt wegen Linearisierung)

- Ergebnis mit PD-Regler

- ★ Anmerkung: K hat im Beispiel vier Komponenten, da es eine PD-Regelung realisiert und sowohl den Winkel als auch den Ort korrigiert, also

$$u = K1 * \phi + K2 * \dot{\phi} + K3 * s + K4 * \dot{s}$$

- ★ K so bestimmen, daß
 - Prozeß stabil, d.h. daß die λ_i die gewünschten Werte haben
 - u technisch sinnvoll machbar ist
- ★ gewünschte Lage der λ_i im Beispiel

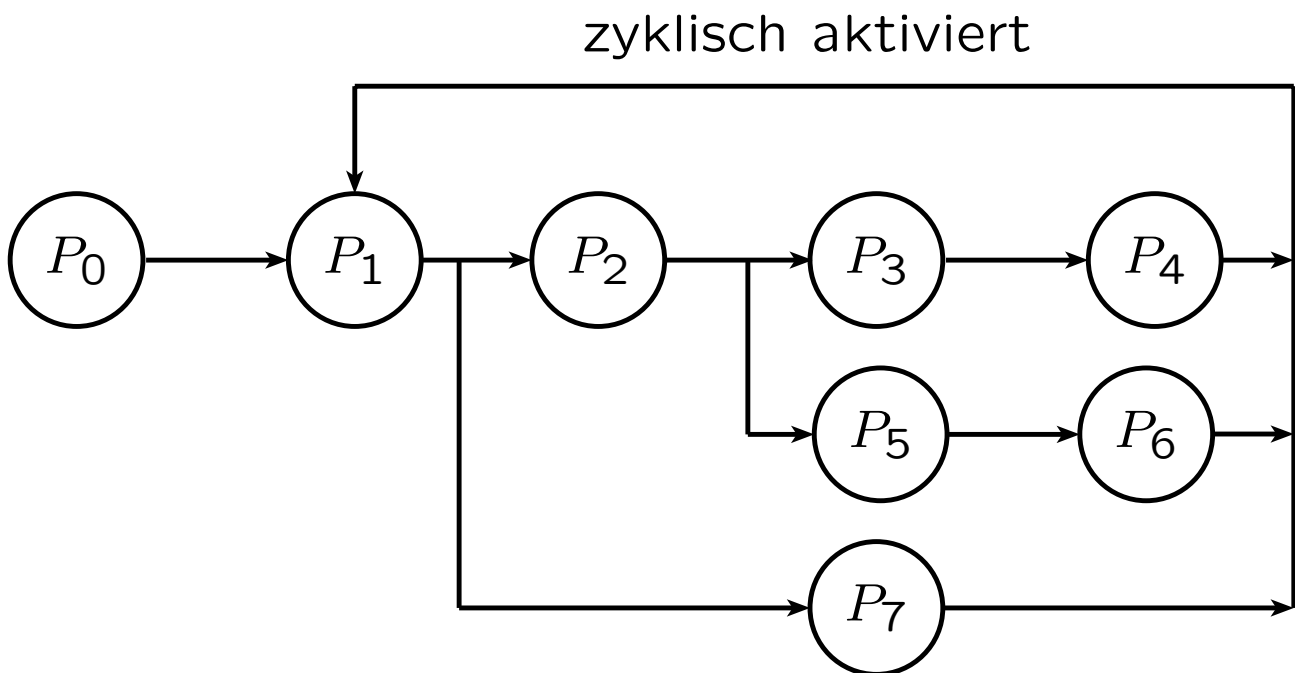


- ★ dann ergibt sich

$$K = (35, 39; 7, 174; 5, 088; 5, 258)$$

- ★ K so wählen, daß auch bei kleinen Störungen Z die λ (ungefähr) im gewünschten Bereich liegen

- Prozesse zur Regelung des balancierten Stabs
 - ★ P0: System initialisieren; neue Vorgaben vom Leitstand
 - ★ P1: Meßwerte (s und ϕ) einlesen; zyklische Aktivierung (Zykluszeit t_m)
 - ★ P2: Beobachterprozeß; berechnet \dot{s} und $\dot{\phi}$
 - ★ P3: Stellgröße u berechnen
 - ★ P4: u ausgeben
 - ★ P5: ϕ und $\dot{\phi}$ für Bildschirm (Prozeßwerte) aufbereiten
 - ★ P6: Bildschirmausgabe
 - ★ P7: Regelungsprotokoll führen
 - ★ Präzedenzgraph



7.6 Maple-Sheet für balancierten Stab

Maple: Inverses Pendel (balancierter Stab) nach Ackermann

1. Die DGL

Horizontalbewegung des Stabschwerpunktes

$$> \text{gl01} := m * \text{diff}(\text{diff}(s(t) + L * S\text{phi}(t), t), t) = H;$$

$$\text{gl01} := m \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} s(t) \right) + L \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} S\text{phi}(t) \right) \right) = H$$

Vertikalbewegung des Stabschwerpunktes

$$> \text{gl02} := m * \text{diff}(\text{diff}(L * C\text{phi}(t), t), t) = V - m * g;$$

$$\text{gl02} := m L \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} C\text{phi}(t) \right) = V - m g$$

Drehbewegung des Stabs um seinen Schwerpunkt

$$> \text{gl03} := \theta * \text{diff}(\text{diff}(\text{phi}(t), t), t) - V * L * S\text{phi}(t) + H * L * C\text{phi}(t) = 0;$$

$$\text{gl03} := \theta \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(t) \right) - V L S\text{phi}(t) + H L C\text{phi}(t) = 0$$

Horizontalbewegung des Wagens

> $gl04 := M * \text{diff}(\text{diff}(s(t), t), t) - u + H = 0;$

$$gl04 := M \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} s(t) \right) - u + H = 0$$

Traegheitsmoment

> $\text{theta} := m * L * L / 3;$

$$\theta := \frac{1}{3} m L^2$$

> $C\text{phi}(t) := \cos(\text{phi}(t));$

$$C\text{phi}(t) := \cos(\phi(t))$$

> $S\text{phi}(t) := \sin(\text{phi}(t));$

$$S\text{phi}(t) := \sin(\phi(t))$$

gegeben: m (Masse Stab), M (Masse Wagen), L (Laenge Stab) unbekannt: $s(t)$, $\text{phi}(t)$, H , V

2. Vereinfachte Differentialgleichungen

Naeherung

> $C\text{phi}(t) := 1;$

$$C\text{phi}(t) := 1$$

> $S\phi(t) := \phi(t);$

$$S\phi(t) := \phi(t)$$

damit wird:

> gl01;

$$m \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} s(t) \right) + L \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(t) \right) \right) = H$$

> gl02;

$$0 = V - m g$$

> gl03;

$$\frac{1}{3} m L^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(t) \right) - V L \phi(t) + H L = 0$$

> gl04;

$$M \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} s(t) \right) - u + H = 0$$

wir loesen jetzt gl01 nach H und gl02 nach V auf:

> $H := \text{solve}(gl01, H);$

$$H := m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} s(t) \right) + m L \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(t) \right)$$

> $V := \text{solve}(gl02, V);$

$$V := m g$$

eingesetzt in gl03 und gl04 ergibt sich:

> $gl031 := \text{simplify}(gl03);$

$$gl031 := \frac{4}{3} m L^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(t) \right) - m g L \phi(t) \\ + L m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} s(t) \right) = 0$$

> $gl041 := \text{simplify}(gl04);$

$$gl041 := M \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} s(t) \right) - u + m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} s(t) \right) \\ + m L \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(t) \right) = 0$$

gl031 und gl041 sind die beiden DGL fuer die beiden Unbekannten s(t) und phi(t)

3. Reglergleichung

> $u := KP * phi(t) + KD * diff(phi(t), t);$

$$u := KP \phi(t) + KD \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi(t) \right)$$

damit wird:

> $gl032 := simplify(gl031);$

$$gl032 := \frac{4}{3} m L^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(t) \right) - m g L \phi(t) + L m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} s(t) \right) = 0$$

> $gl042 := simplify(gl041);$

$$gl042 := M \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} s(t) \right) - KP \phi(t) - KD \left(\frac{\partial}{\partial t} \phi(t) \right) + m \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} s(t) \right) + m L \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(t) \right) = 0$$

4. Loesung

Loesungsansatz

$$> \text{phi}(t) := cp * \exp(\text{lambd}a * t);$$

$$\phi(t) := cp e^{(\lambda t)}$$

$$> \text{s}(t) := cs * \exp(\text{lambd}a * t);$$

$$s(t) := cs e^{(\lambda t)}$$

eingesetzt in die beiden Gleichungen und dividiert durch $\exp(\text{lambd}a * t)$ ergibt sich ein homogenes Gleichungssystem fuer die Unbekannten cp und cs

$$> \text{gl033} := \text{simplify}(\text{op}(1, \text{gl032}) / \exp(\text{lambd}a * t)) = 0;$$

$$\text{gl033} := \frac{1}{3} L m (4 L cp \lambda^2 - 3 g cp + 3 cs \lambda^2) = 0$$

$$> \text{gl043} := \text{simplify}(\text{op}(1, \text{gl042}) / \exp(\text{lambd}a * t)) = 0;$$

$$\text{gl043} := M cs \lambda^2 - KP cp - KD cp \lambda + m cs \lambda^2 + L m cp \lambda^2 = 0$$

homogene Gleichung fuer cp und cs, nur
Loesung, falls Determinante 0 in diesem Fall sind
die Loesungen voneinander abhaengig

```
> solve(gl033,cp);
```

$$-3 \frac{cs \lambda^2}{4 L \lambda^2 - 3 g}$$

Prozedur dafuer

```
> Cp:=proc(lam,cs) global L,g;
```

```
> -3*cs*lam*lam/(4*L*lam*lam-3*g);
```

```
> end;
```

```
Cp := proc(lam,cs)
global L,g;
-3*cs*lam^2/(4*L*lam^2-3*g)
end
```

die Matrixelemente der Gleichungen lauten

$$> a11 := L * m / 3 * (4 * L * \lambda * \lambda - 3 * g);$$

$$a11 := \frac{1}{3} L m (4 L \lambda^2 - 3 g)$$

$$> a12 := L * m / 3 * 3 * \lambda * \lambda;$$

$$a12 := L m \lambda^2$$

$$> a21 := -KP - KD * \lambda + L * m * \lambda * \lambda;$$

$$a21 := -KP - KD \lambda + L m \lambda^2$$

$$> a22 := M * \lambda * \lambda + m * \lambda * \lambda;$$

$$a22 := M \lambda^2 + m \lambda^2$$

damit ergibt sich die Determinante

$$> detgl := collect(a11 * a22 - a12 * a21 = 0, \lambda);$$

$$\begin{aligned} detgl := & \left(\frac{4}{3} m L^2 (M + m) - L^2 m^2 \right) \lambda^4 \\ & + L m K D \lambda^3 \\ & + (-m g L (M + m) + L m K P) \lambda^2 = 0 \end{aligned}$$

Loesungen sind

> lam:=solve(detgl,lambda);

$$\begin{aligned} lam := & 0, 0, \frac{1}{2} \left(-L m K D + \frac{1}{3} (9 L^2 m^2 K D^2 \right. \\ & + 48 m^2 L^3 M^2 g + 60 m^3 L^3 M g \\ & - 48 m^2 L^3 M K P + 12 L^3 m^4 g \\ & \left. - 12 L^3 m^3 K P)^{1/2} \right) / \left(\frac{4}{3} m L^2 M + \frac{1}{3} L^2 m^2 \right), \\ & \frac{1}{2} \left(-L m K D - \frac{1}{3} (9 L^2 m^2 K D^2 \right. \\ & + 48 m^2 L^3 M^2 g + 60 m^3 L^3 M g \\ & - 48 m^2 L^3 M K P + 12 L^3 m^4 g \\ & \left. - 12 L^3 m^3 K P)^{1/2} \right) / \left(\frac{4}{3} m L^2 M + \frac{1}{3} L^2 m^2 \right) \end{aligned}$$

> lambda1:=lam[1];

$$\lambda_1 := 0$$

> lambda2:=lam[2];

$$\lambda_2 := 0$$

> lambda3:=simplify(lam[3]);

$$\lambda_3 := -\frac{1}{2} \left(3 L m K D - \sqrt{3} (L^2 m^2 (3 K D^2 + 16 L M^2 g + 20 m g L M - 16 L M K P + 4 m^2 g L - 4 L m K P))^{1/2} \right) / (m L^2 (4 M + m))$$

> lambda4:=simplify(lam[4]);

$$\lambda_4 := -\frac{1}{2} \left(3 L m K D + \sqrt{3} (L^2 m^2 (3 K D^2 + 16 L M^2 g + 20 m g L M - 16 L M K P + 4 m^2 g L - 4 L m K P))^{1/2} \right) / (m L^2 (4 M + m))$$

die Gesamtloesung setzt sich aus den Teilloesungen zusammen

winkel berechnet $\phi(t)$, abhaengig von weiteren frei wahlbaren Parametern

- > winkel:=proc(t,Cs1,Cs2,Cs3,kp,kd)
 global KP,KD,tit;
 local wu,rwu,iwu;
- > KP:=kp;
- > KD:=kd;
- > wu:=evalf(lambda3);
- > rwu:=Re(wu);
- > iwu:=Im(wu);
- > tit:=cat('phi(t) fuer KP=',convert(KP,string),
 ' KD=',convert(KD,string),
 ' rwu=',convert(rwu,string),
 ' iwu=',convert(iwu,string));
- > Re(evalf(Cp(lambda1,Cs1)*exp(lambda1*t)+
 Cp(lambda2,Cs2)*exp(lambda2*t)+
 Cp(lambda3,Cs3)*exp(lambda3*t)+
 Cp(lambda4,Cs1)*exp(lambda4*t)));
- > end;

```

winkel :=
  proc(t,Cs1,Cs2,Cs3,kp,kd)
  local wu,rwu,iwu;
  global KP,KD,tit;
    KP := kp;
    KD := kd;
    wu := evalf(lambda3);
    rwu := Re(wu);
    iwu := Im(wu);
    tit := ...
    Re(evalf(Cp(lambda1,Cs1)*
      exp(lambda1*t))+ ...
  end

```

5. Berechnung der Werte KP und KD fuer vorgegebene Wurzeln $rw \pm I*iw$

> λ_3 ;

$$-\frac{1}{2} \left(3 L m K D - \sqrt{3} (L^2 m^2 (3 K D^2 + 16 L M^2 g + 20 m g L M - 16 L M K P + 4 m^2 g L - 4 L m K P))^{1/2} \right) / (m L^2 (4 M + m))$$

> $realteil := rw = -1/2 * 3 * L * m * KD / (m * L * L * (4 * M + m));$

$$realteil := rw = -\frac{3}{2} \frac{KD}{L(4M + m)}$$

> $kd := solve(realteil, KD);$

$$kd := -\frac{2}{3} rw L (4 M + m)$$

> imteil:= iw*iw=-1/4*3*L*L*m*m*(
 3*KD*KD+16*L*M*M*g+20*m*g*L*M-
 16*L*M*KP+4*m*m*g*L-4*L*m*KP)/
 (m*L*L*(4*M+m))^2;

$$\text{imteil} := iw^2 = -\frac{3}{4}(3KD^2 + 16LM^2g + 20mgLM - 16LMKP + 4m^2gL - 4LmKP) / (L^2(4M+m)^2)$$

> kp:=solve(imteil,KP);

$$kp := -\left(iw^2 + \frac{9}{4} \frac{KD^2}{L^2(4M+m)^2} + 12 \frac{M^2g}{L(4M+m)^2} + 15 \frac{mgM}{L(4M+m)^2} + 3 \frac{m^2g}{L(4M+m)^2} \right) / \left(-12 \frac{M}{L(4M+m)^2} - 3 \frac{m}{L(4M+m)^2} \right)$$

6. Beispiele

zunächst eine Berechnung von $\phi(t)$ bei verschiedenen Parametern, u.a. dem Realteil und dem Imaginärteil der Wurzeln (λ)

```
> winkel2:=proc(t,Cs1,Cs2,Cs3,rwi,iwi)
  global rw,iw,KP,KD; local lkp,lkd;

> rw:=rwi;

> iw:=iwi;

> lkd:=kd;

> KD:=lkd;

> lkp:=kp;

> winkel(t,Cs1,Cs2,Cs3,lkp,lkd);

> end;
```

```
winkel2 := proc(t,Cs1,Cs2,Cs3,rwi,iwi)
  local lkp,lkd;
  global rw,iw,KP,KD;
  rw := rwi;
  iw := iwi;
  lkd := kd;
  KD := lkd;
  lkp := kp;
  winkel(t,Cs1,Cs2,Cs3,lkp,lkd)
end
```

jetzt feste Zahlenwerte

```
> M:=0.981;
```

```
M := .981
```

```
> m:=0.08;
```

```
m := .08
```



```
> L:=0.312;
```

```
L := .312
```

```
> g:=9.81;
```

```
g := 9.81
```

Ausgabeprozedur

```
> aus:=proc(ta,te,cs1,cs2,cs3,lrw,liw);
```

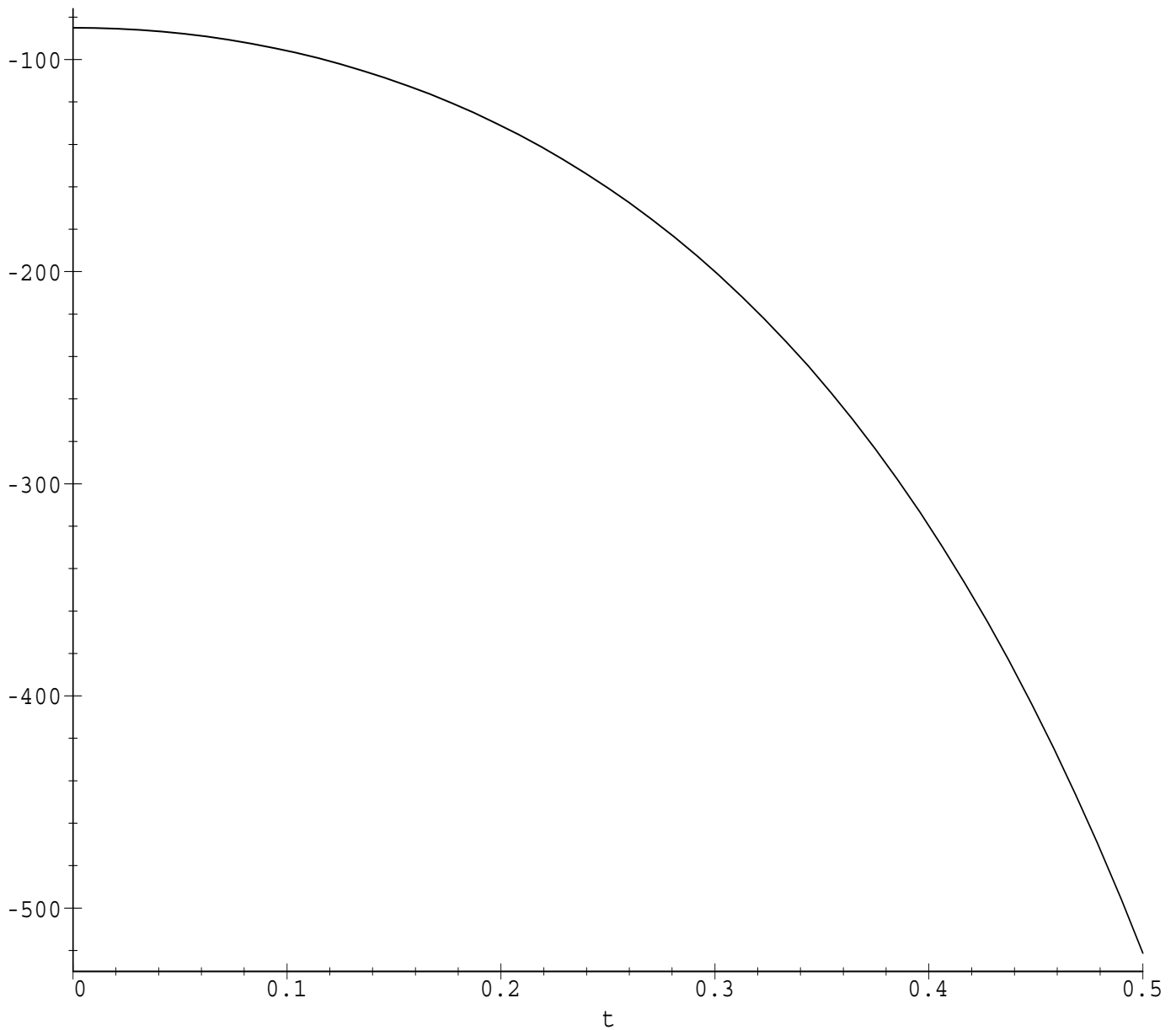
```
> print(plot(winkel2(t,cs1,cs2,cs3,lrw,liw),  
t=ta..te,title=tit,axes=NORMAL));
```

```
> end;
```

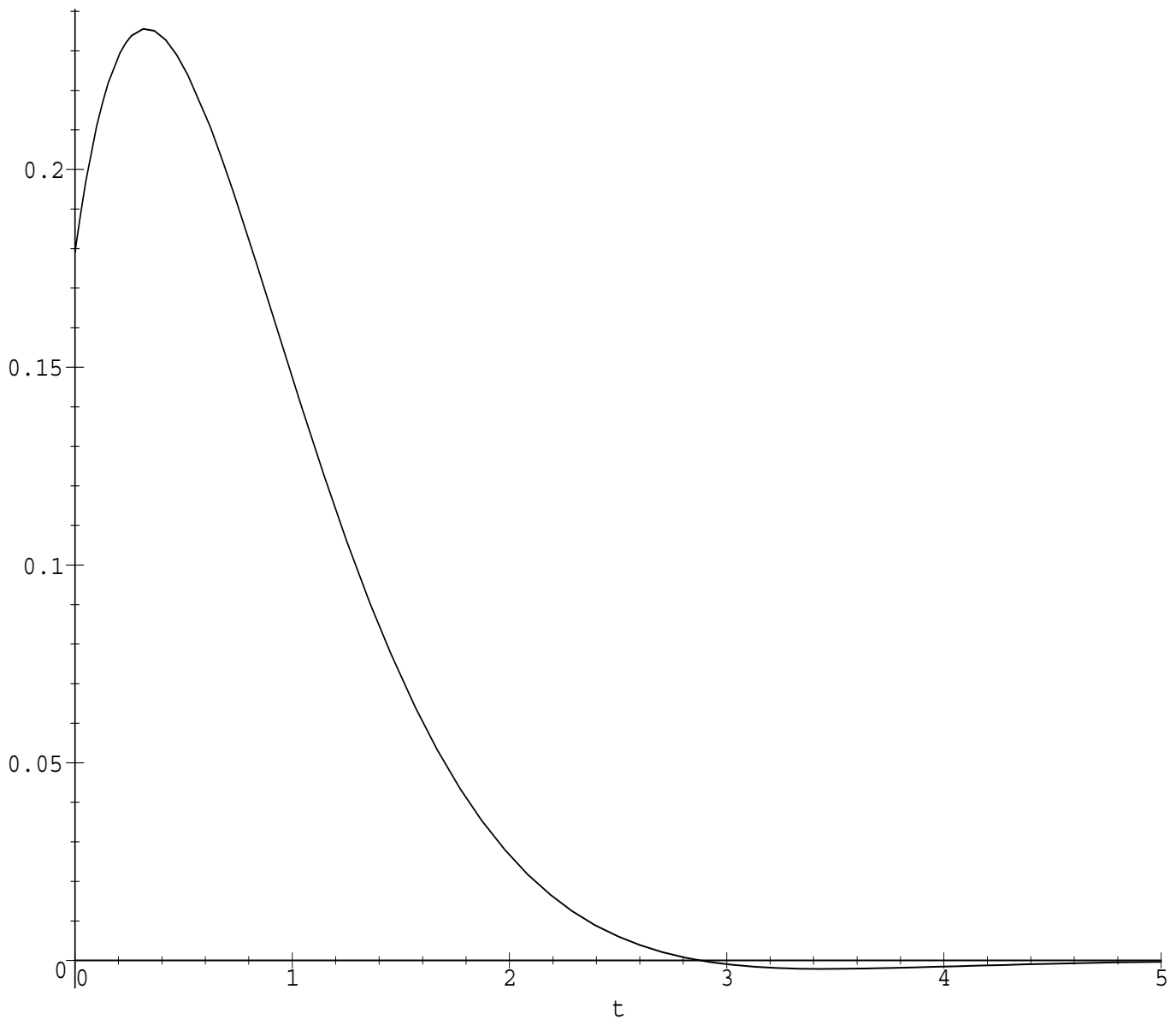
```
aus :=  
proc(ta,te,cs1,cs2,cs3,lrw,liw)  
  print(  
    plot(winkel2(t,cs1,cs2,cs3,lrw,liw),  
      t = ta .. te,title = tit,  
      axes = NORMAL)  
  )  
end
```

Ausgaben fuer ausgewaehlte Faelle

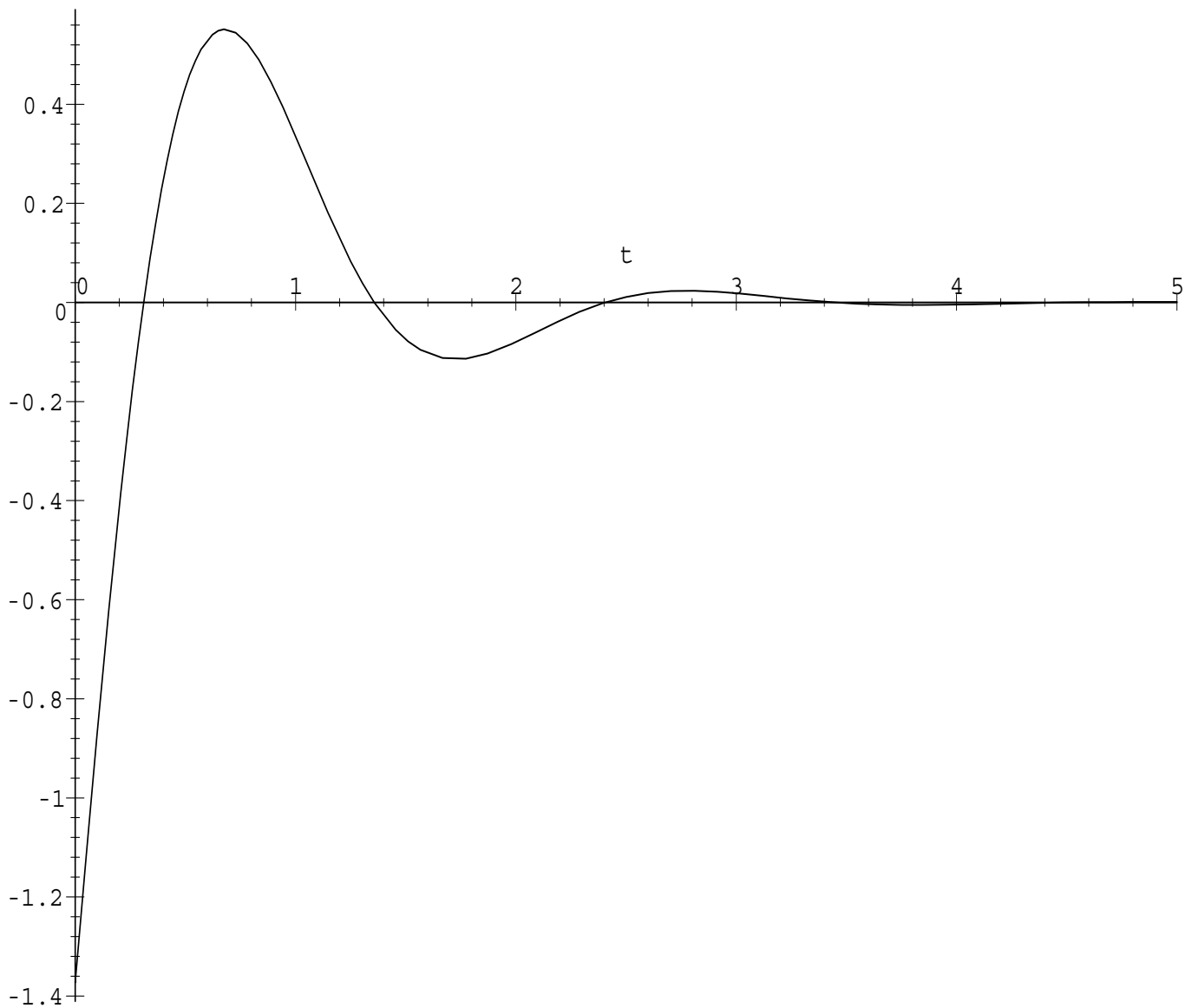
- > `plot(winkel(t,1,1,1,0,0),t=0..1,title=tit,
axes=NORMAL);`
- > `plot(winkel2(t,1,1,1,-1.5,2),t=0..0.5,title=tit,
axes=NORMAL);`
- > `aus(0, 5, 1, 1, 1, -1.5, 1.0);`
- > `aus(0, 5, 1, 1, 1, -1.5, 2.0);`
- > `aus(0, 5, 1, 1, 1, -1.5, 3.0);`
- > `aus(0, 5, 1, 1, 1, -3.0, 1.0);`
- > `aus(0, 5, 1, 1, 1, -3.0, 20.0);`



- $\phi(t)$ für unregelmäßig balancierten Stab
 - ★ nicht stabil
 - ★ wegen Linearisierung ist ϕ nicht begrenzt



- $\phi(t)$ für geregelten balancierten Stab
 - ★ wurzeln: $0, -1.5 \pm 1 \cdot i$
 - ★ stabil, Überschwingen
 - ★ wegen kleinem Imaginärteil der Wurzel lange Schwingungsperiode



- $\phi(t)$ für geregelten balancierten Stab
 - ★ wurzeln: $0, -1.5 \pm 3 \cdot I$
 - ★ stabil, Überschwingen
 - ★ wegen größerem Imaginärteil der Wurzel kürzere Schwingungsperiode

7.7 Einführung in die Fuzzy-Logik

- Definition

Eine unscharfe Menge (fuzzy set) \tilde{A} über der scharfen (crisp) Menge X wird durch eine Zugehörigkeitsfunktion $\mu(x, X, \tilde{A})$ charakterisiert, die jedem $x \in X$ eine reelle Zahl aus $[0, 1]$ zuordnet: die Wahrscheinlichkeit, mit der das Element der unscharfen Menge angehört

- Unscharfe Menge

$$\tilde{A} = \left\{ \left(x_1, \mu(x_1, X, \tilde{A}) \right), \dots, \left(x_n, \mu(x_n, X, \tilde{A}) \right) \right\}$$

- Scharfe Menge \tilde{X}

$$\mu(x, X, \tilde{X}) = 1 \quad \forall x \in X$$

- Trägermenge (support) von \tilde{A}

$$\text{supp}(\tilde{A}) \equiv \left\{ x \in X \mid \mu(x, X, \tilde{A}) > 0 \right\}$$

- α -Schnitt (α -level-set, α -cut)

$$\tilde{A}_\alpha = \left\{ \left(x, \mu(x, X, \tilde{A}) \right) \mid x \in X \wedge \mu(x, X, \tilde{A}) \geq \alpha \right\}$$

- gekappte unscharfe Menge $\tilde{A} \uparrow \alpha$

Sei \tilde{A} über der Scharfen Menge X definiert durch $\mu(x, X, \tilde{A})$, dann gilt für alle $x \in X$

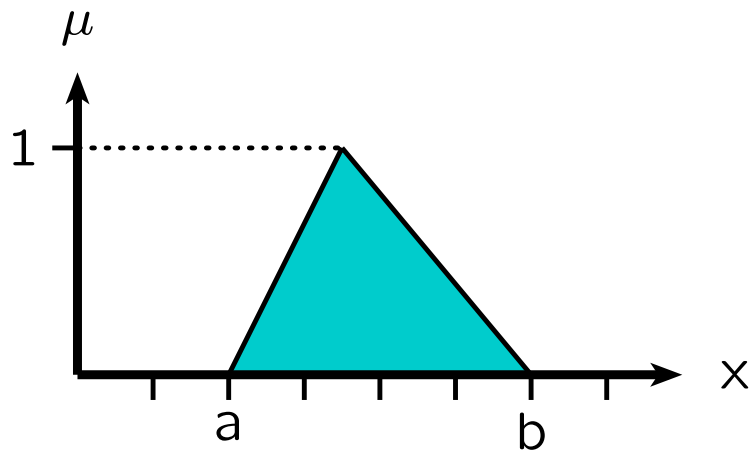
$$\mu(x, X, \tilde{A} \uparrow \alpha) =$$

$$\begin{cases} \mu(x, X, \tilde{A}), & \text{falls } \mu(x, X, \tilde{A}) \leq \alpha \\ \alpha, & \text{falls } \mu(x, X, \tilde{A}) > \alpha \end{cases}$$

- Ein wesentlicher Teil des Entwurfsprozesses liegt in der Festlegung der Form und Werte der Zugehörigkeitsfunktionen μ

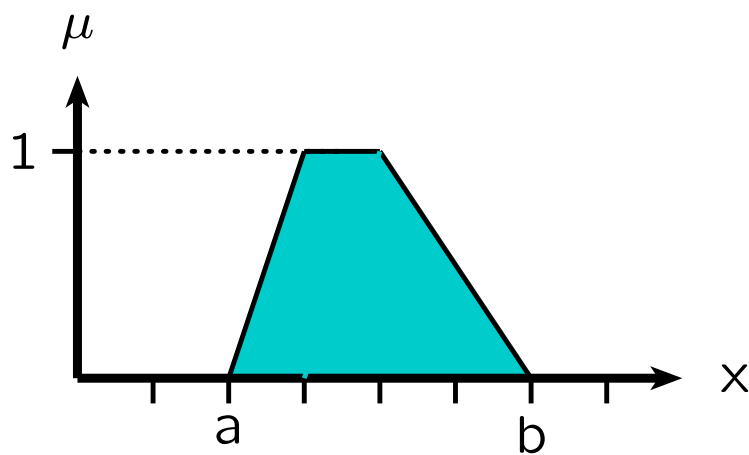
- Programme bieten einfache Formen an, z.B.

- ★ Dreieck



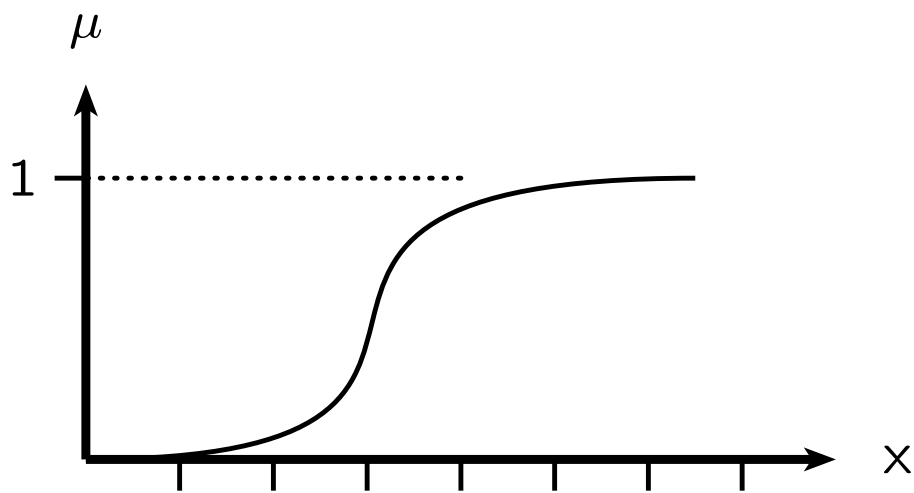
häufig gleichschenkelig

- ★ Trapez

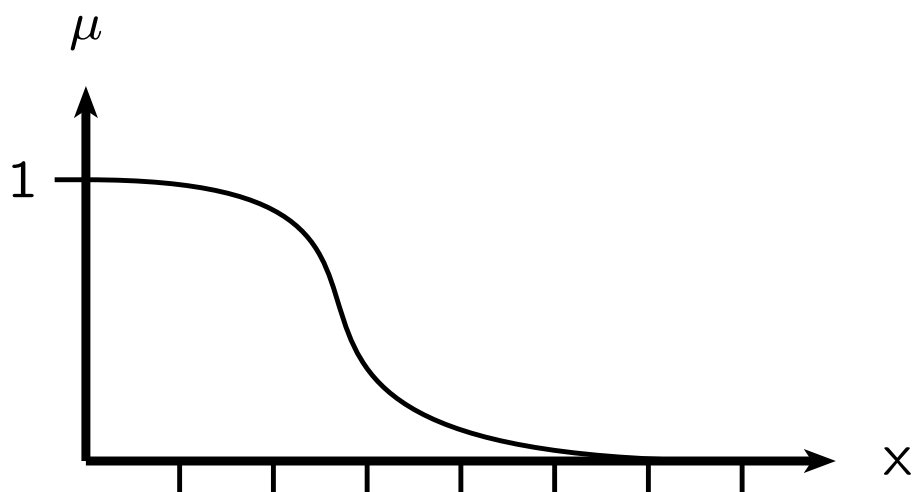


meist symmetrisch

★ "S"-Funktion



★ "Z"-Funktion



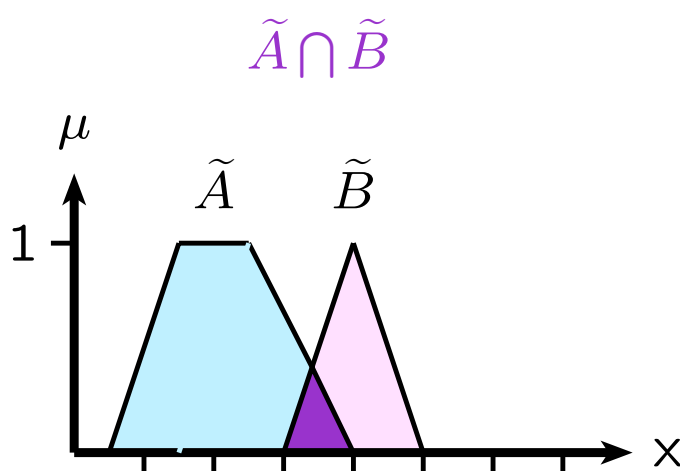
- ★ Üblich sind auch Polygonzug, Glockenkurve, \sin^2 usw.

- Operationen
 - ★ Benötigt werden Durchschnitt, Vereinigung, Komplement der unscharfen Mengen
 - ★ Definition dieser Operationen frei an Anwendung anpaßbar, solange für $\mu = 0$ und $\mu = 1$ die üblichen Logikoperationen gelten bzw. allgemeiner bestimmte Normen (t-Norm, s-Norm) erfüllt sind
- Übliche Operationen für die Regelungstechnik
 - ★ Durchschnitt

$$\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$$

wobei

$$\mu(x, X, \tilde{C}) = \min(\mu(x, X, \tilde{A}), \mu(x, X, \tilde{B}))$$

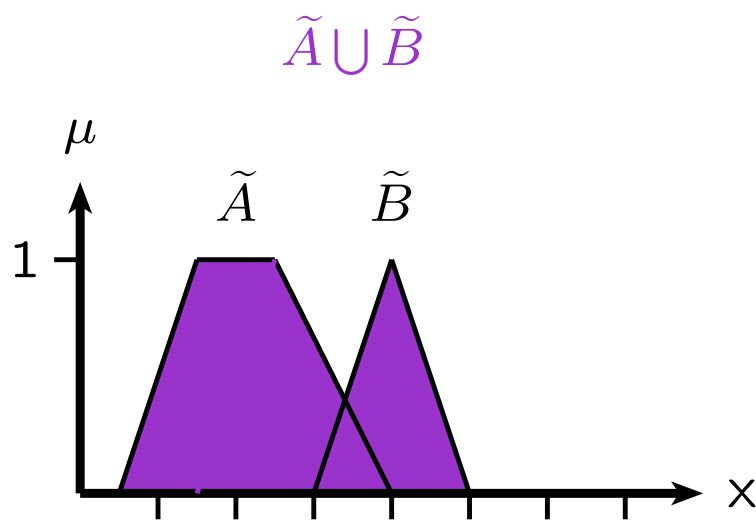


★ Vereinigung

$$\tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$$

wobei

$$\mu(x, X, \tilde{C}) = \max(\mu(x, X, \tilde{A}), \mu(x, X, \tilde{B}))$$



★ Komplement

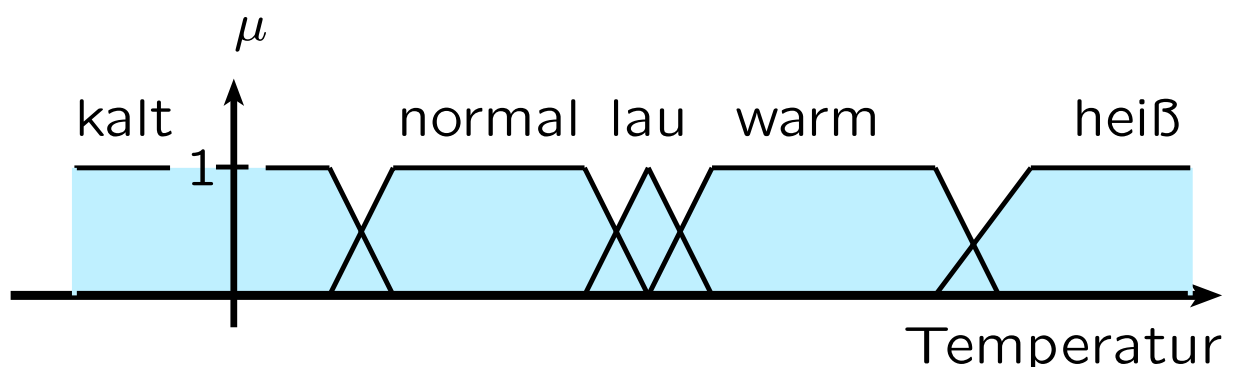
$$\tilde{C} = \overline{\tilde{A}}$$

wobei

$$\mu(x, X, \tilde{C}) = (1 - \mu(x, X, \tilde{A})) \quad \forall x \in X$$

- Linguistische Variable

- ★ Eine linguistische Variable (L.V.) ist charakterisiert durch ihren Namen v und ihre Werte (Ausprägungen)
- ★ der L.V. ist eine scharfe Menge X zugeordnet
- ★ Menge der Werte (linguistische Terme, L.T.) von v ist Termset $\mathcal{T}(v)$
- ★ jeder linguistische Term ist eine unscharfe Menge definiert über der scharfen Menge X
- ★ Beispiel Temperatur
 - L.V. ist Temperatur
 - zugehörige scharfe Menge ist Menge der Temperaturwerte
 - zugehörige L.T. sind: kalt, normal, lau, warm, heiß
 - Zugehörigkeitsfunktionen



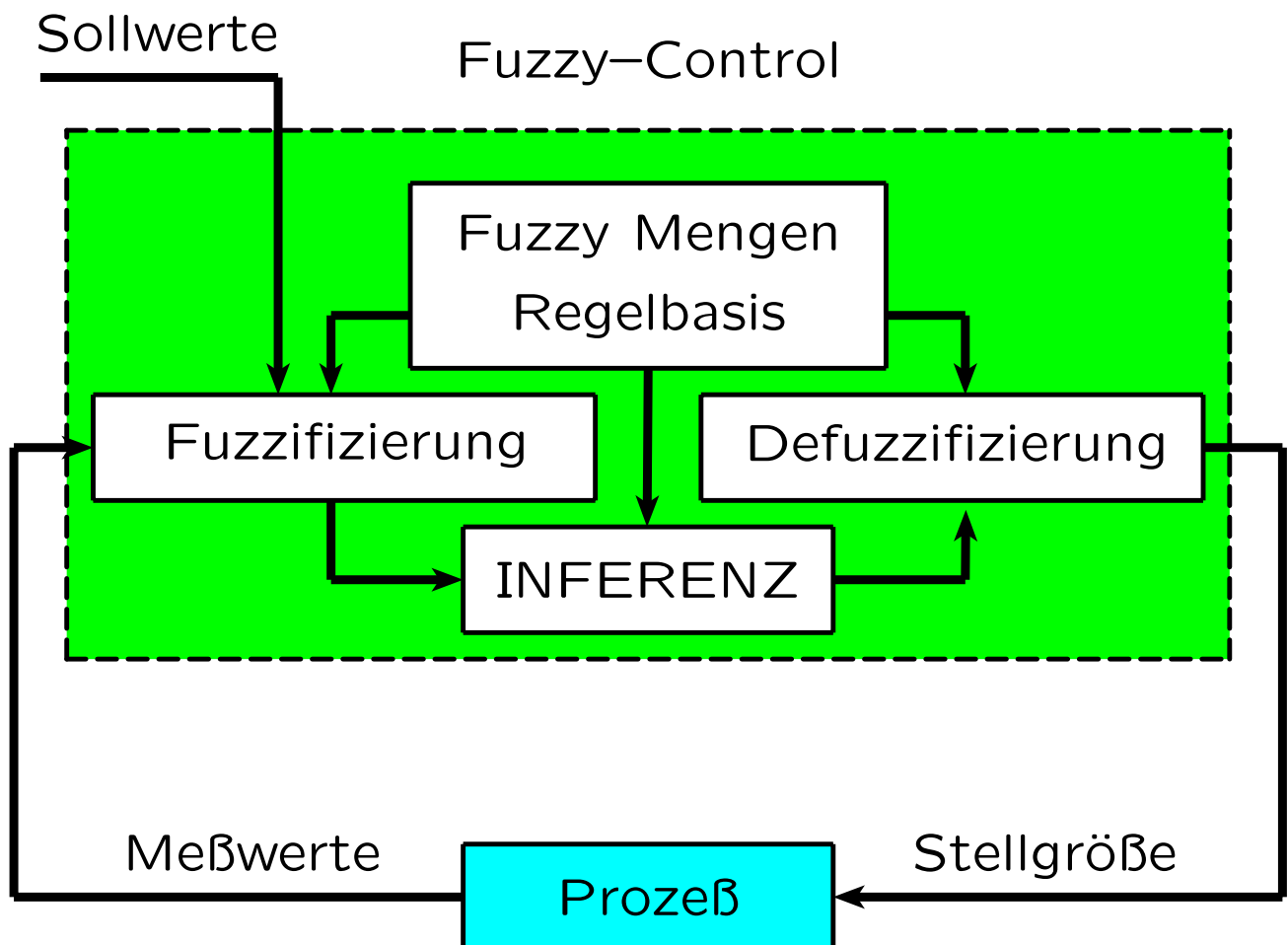
7.8 Fuzzy–Regelung

- weit verbreitet
 - ★ insbesondere in Konsumgütern, wie
 - ★ Waschmaschinen
 - ★ Fotoapparate
- Warum?
 - ★ mathematisches Modell für Prozeß nicht vorhanden, zu schwierig
 - ★ Fuzzy–Regelung stellt nur geringe mathematische Anforderungen
- Der dem Menschen (aus Erfahrung) bekannte Regelungsvorgang wird in WENN–DANN–Regeln mit linguistischen Variablen formuliert
- Prämissen und Konklusion werden "unscharf" ausgewertet

- Entwurfsschritte

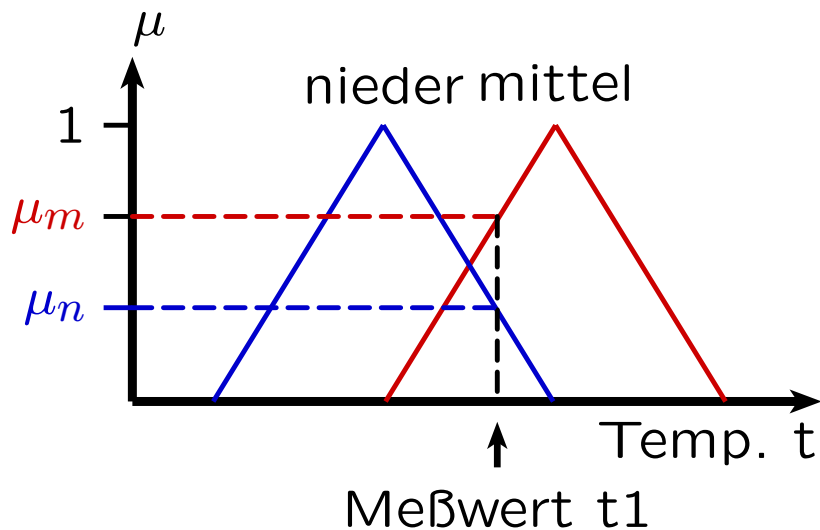
- (1) Fuzzifizierung der Meßwerte: Festlegung der linguistischen Variablen und ihrer Terme mit entsprechenden Zugehörigkeitsfunktionen
- (2) Erstellen der Regelbasis (Expertenwissen)
- (3) Auswahl geeigneter Inferenzoperationen
- (4) Defuzzifizierung: Berechnung der scharfen Stellgrößen

- Struktur Fuzzy-Regler



- Die einzelnen Entwurfsschritte am Beispiel erklärt
 - ★ nach H.-H. Bothe: Fuzzy–Logic. Springer 1993
 - ★ Aufgabe: Kühlventilstellung regeln
 - ★ Meßwert: Temperatur t_1
 - ★ Stellwert: Stellung k_s des Kühlventils
- zu (1): Prinzip Fuzzifizierung
 - ★ jeder Meßwert stammt aus einer scharfen Menge (L.V.)
 - ★ zu allen linguistischen Variablen sind unscharfe Mengen (L.T.) definiert (menschliche Erfahrung, "trial and error")
 - ★ für jeden Meßwert werden die Zugehörigkeitswahrscheinlichkeiten zu den L.T. ermittelt
- zu (1): Beispiel Fuzzifizierung
 - ★ Temperatur t_1 gemessen
 - ★ es gibt zwei scharfe Mengen (L.V.)
 - Temperatur T
 - Stellung K des Kühlventils

- ★ unscharfe Mengen der L.V. Temperatur T (unvollständig)

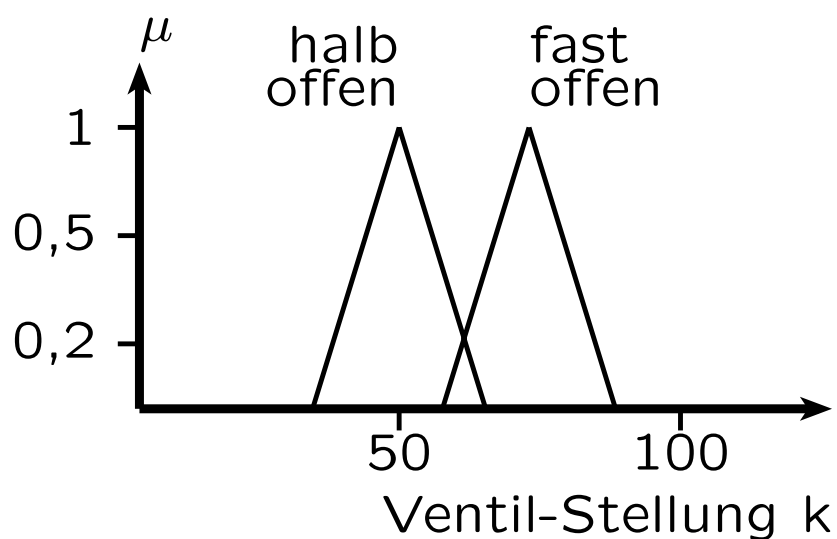


wobei

$$\mu_n = \mu(t1, T, \widetilde{\text{nieder}})$$

$$\mu_m = \mu(t1, T, \widetilde{\text{mittel}})$$

- ★ unscharfe Mengen der L.V. Ventil-Stellung K (unvollständig)

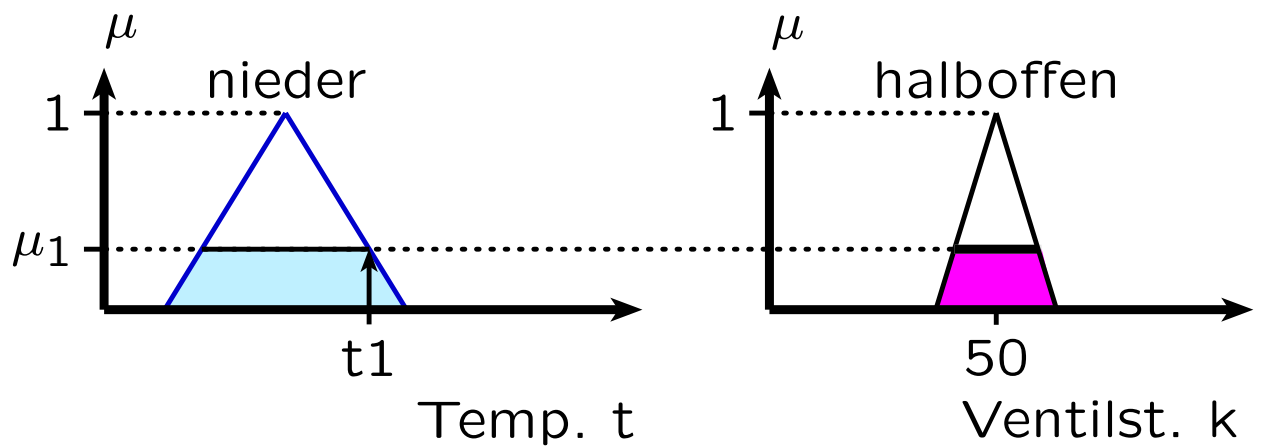


- zu (2): Prinzip Regelbasis
 - ★ Elementarbedingung der Form $(V = \tilde{A})$,
wobei V eine L.V.
(Gleichheitszeichen ist als "ist" zu lesen)
 - ★ Verknüpfung der Elementarbedingungen mit
AND, OR, NOT
 - ★ Aktion der Form $(W = \tilde{B})$, wobei W eine
L.V.
 - ★ Form der Regel j z.B:
IF $(V_1 = \tilde{A}_{1j})$ AND
 $(V_2 = \tilde{A}_{2j})$ OR
 $(V_3 = \tilde{A}_{3j})$
THEN $W = \tilde{B}_j$
 - ★ V_1, V_2, V_3, W sind L.V.
 - ★ $\tilde{A}_{1j}, \tilde{A}_{2j}, \tilde{A}_{3j}, \tilde{B}_j$ sind L.T. der
entsprechenden L.V.
- zu (2): Beispiel Regelbasis
 - ★ R1: if $(T = \widetilde{\text{nieder}})$ THEN $K = \widetilde{\text{halböffnen}}$
 - ★ R2: if $(T = \widetilde{\text{mittel}})$ THEN $K = \widetilde{\text{fastöffnen}}$

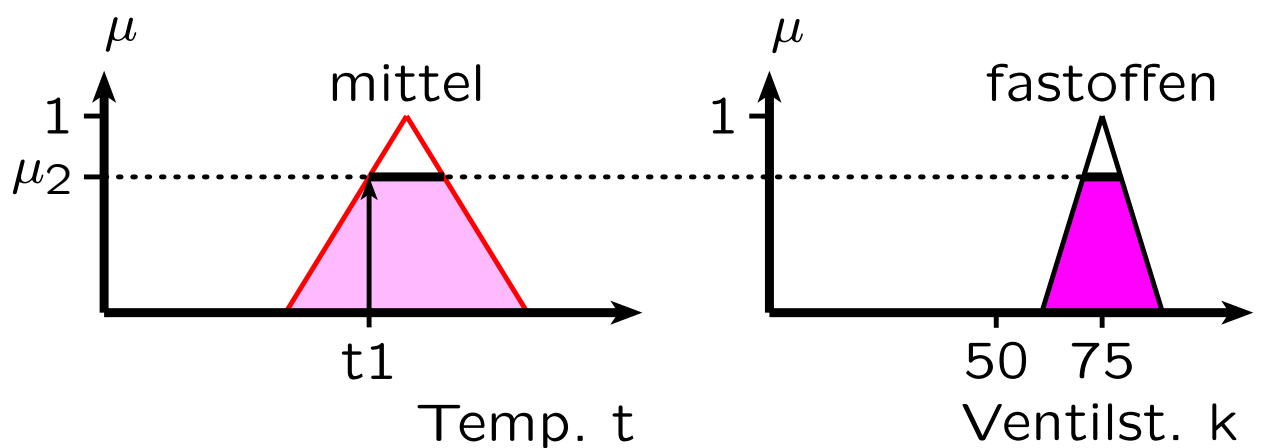
- zu (3): Prinzip Inferenz
 - ★ für jede Elementarbedingung ($X = \tilde{A}$) wird bei gemessenem Wert $x \in X$ berechnet $\mu(x, X, \tilde{A})$
 - ★ Verknüpfung Elementarbedingungen durch spezifische Strategien
 - ★ Verknüpfung in Regelungstechnik nach Mamdani:
 - AND als Durchschnitt
(Minimum μ -Werte)
 - OR als Vereinigung
(Maximum μ -Werte)
 - NOT als Komplement
($1 - \mu$)
 - ★ damit μ_j für Regel j aus Bedingungsteil berechenbar
 - ★ μ_j beschränkt den μ -Wert der Konklusions-Variablen \tilde{B}_j der rechten Seite; es wird berechnet die gekappte unscharfe Menge $\tilde{B}_j \uparrow \mu_j$

- zu (3): Beispiel Inferenz

- ★ R1 liefert $\mu_1 = \mu(t1, T, \widetilde{nieder})$ und daraus $\widetilde{halboffen} \uparrow \mu_1$



- ★ R2 liefert $\mu_2 = \mu(t1, T, \widetilde{mittel})$ und daraus $\widetilde{fastoffen} \uparrow \mu_2$



- zu (4): Prinzip Defuzzifizierung
 - ★ aus den gekappten unscharfen Mengen bezüglich einer linguistischen Variablen wird die Vereinigungsmenge gebildet
 - ★ mehrere Verfahren zur Berechnung scharfer Stellwerte aus gekappten unscharfen Mengen aus Konklusionen in Schritt 3
 - Mittelwertbildung (mean of maxima)
 - Mittelwert der Maximalwerte
 - Schwerpunktbildung der Fläche (center of area/gravity)
 - gewichtete Schwerpunktbildung der Fläche, falls die Regeln gewichtet werden

- zu (4): Formeln

- ★ Bezeichnungen:

x ein Wert des Ausgabebereichs (Stellwert)

$\mu(x)$ Zugehörigkeitsfunktion zu der oben genannten Vereinigungsmenge

g_j Gewicht der Regel j

μ_j Ergebnis der linken Seite der Regel j

$F(\tilde{A})$ Fläche der Zugehörigkeitsfunktion der unscharfen Menge

- ★ x-Koordinate x_s des Schwerpunkts

$$x_s = \int x \mu(x) dx / \int \mu(x) dx$$

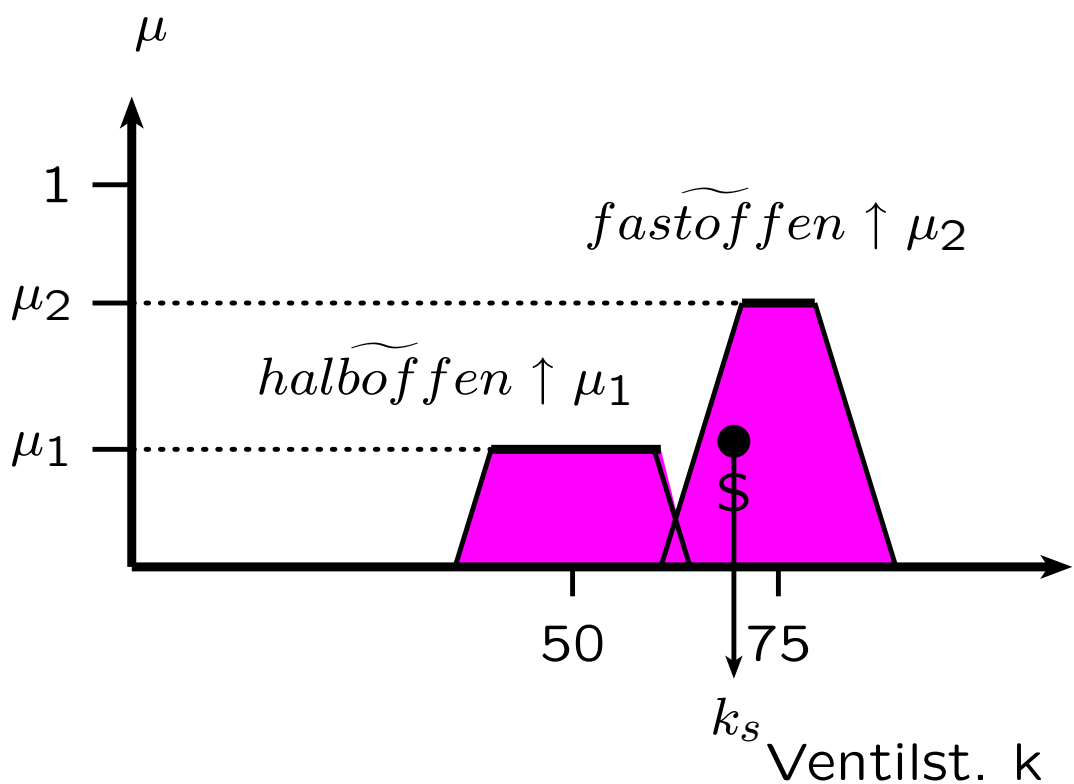
- ★ Schwerpunkt bei Massenpunkten i mit Fläche F_i und x-Koordinate x_{s_i} des Schwerpunkts

$$x_s = \sum_i x_{s_i} F_i / \sum_i F_i$$

- ★ x-Koordinate x_s^* des Schwerpunkts bei gewichteten Regeln $j = 1, 2, \dots, n$

$$x_s^* = \sum_{j=1}^n x_{s_j} F(\tilde{B}_j \uparrow \mu_j) \mu_j g_j / \sum_{j=1}^n F(\tilde{B}_j \uparrow \mu_j) \mu_j g_j$$

- zu (4): Beispiel Defuzzifizierung
 - ★ Schwerpunktbildung der gekappten unscharfen Mengen $halboffnen \uparrow \mu_1$ und $fastoffen \uparrow \mu_2$
 - ★ Schwerpunkt sei $S = (k_s, \mu_s)$
 - ★ Ventil ist auf k_s einzustellen



- Hinweis: Es gibt adaptive Fuzzy-Regelungen
 - ★ Adaption der Gewichte der Regeln
 - ★ Veränderung der Neigung der Zugehörigkeitsfunktionen der linguistischen Terme innerhalb vorgegebener Grenzen

7.9 Fuzzy–Regelung eines aufrechten (inversen) Pendels (balancierter Stab)

- klassische schwierige Regelungsaufgabe
- in der Literatur mehrere Beschreibungen mittels Fuzzy–Regelung
- Linguistische Variable
 - ★ Winkel ϕ
mit L.T.: neg, zero, pos
 - ★ Winkelbeschleunigung $\dot{\phi}$
mit L.T.: neg, zero, pos
 - ★ Stellkraft U
mit L.T.: grossneg, neg, zero, pos, grosspos

- 9 Regeln durch AND-Verknüpfung von ϕ und $\dot{\phi}$
z.B.
IF ($\phi = \text{neg}$) AND ($\dot{\phi} = \text{pos}$) THEN U = pos
- Satz von Regeln durch Matrixdarstellung übersichtlicher

$\dot{\phi} \backslash \phi$	neg	zero	pos
neg	grosspos	pos	neg/zero
zero	pos	zero	neg
pos	pos/zero	neg	grossneg

7.10 Fuzzy–Regler als Chips

- Übliche Aufgaben benötigen oft nur Regler mit 2 Eingängen (x und dx/dt) und einer Ausgangsgröße (2 bis 4 msec)
- Hierfür spezielle Chips am Markt (1989-1995)
- zeitkritische Fuzzy–Regelungen benötigen Hochleistungs-chips als Co-Prozessoren
 - ★ Hochleistung durch interne parallele Regelauswertung
 - ★ bis zu je 8 Ein– und Ausgangsgrößen
 - ★ bis zu 16 Punkten pro Zugehörigkeitsfunktion (max. 7 Zugehörigkeits–Funktionen pro Variable)
 - ★ 25 bis zu 256 Regeln
 - ★ Auswertungszeiten im Bereich von 0,1 bis 50 msec

- Vorreiter 1989: Togai FC–110
- Hochleistungs-Fuzzychips, z.B.
OMRON FP-3000, SIEMENS SAE 81C99
- OMRON FP-3000
 - ★ 8 Eingänge
 - ★ 8 Ausgänge
 - ★ maximal 96 Regeln
 - ★ 3 msec für Auswertung von 96 Regeln
- SAE 81C99
 - ★ 256 Eingänge
 - ★ 64 Ausgänge
 - ★ maximal 16384 Regeln
 - ★ 7,9 Mio Regeln je Sekunde
etwa 1,3 μ sec je Regel