

18.12.02

①

③ Beispiel einer fundierten InduktionProblem: Terminierung des  $ggT(a, b)$ 

$$ggT(a, b) = \begin{cases} a & a = b \\ ggT(a-b, b) & a > b \\ ggT(a, b-a) & a < b \end{cases}$$

Zu zeigen:  $ggT(a, b)$  in obiger Impl. terminiert, d.h.  $ggT(a, b) \neq \perp$  für alle  $a, b > 0$

Beweis:④ Definition einer geeigneten fundierten Ordnung

$$(a', b') \leq (a, b) \Leftrightarrow [(a' + b') < a + b] \wedge \neg(a = b)$$

$$(a', b') \stackrel{?}{=} (a, b) \Leftrightarrow (a' + b') = a + b$$

transitiv:  $(a', b') \leq (a, b) \wedge (a, b) \leq (a'', b'')$ 

$$\stackrel{?}{\Rightarrow} (a', b') \leq (a'', b'') \quad \checkmark$$

reflexiv:  $(a, b) \stackrel{?}{\leq} (a, b) \quad \checkmark$ antisymmetrie:

$$(a', b') \leq (a, b) \wedge (a, b) \leq (a', b') \stackrel{?}{\Rightarrow} (a, b) \stackrel{?}{=} (a', b')$$

$$(a' + b') \leq (a + b)$$

$$\wedge (a + b) \leq (a' + b') \Rightarrow (a + b) = a' + b' \quad \checkmark$$

Fundiertheit (?): Zu zeigen: Es gibt <sup>①</sup>  
keine (echt) unendl. absteigende Ketten;  
d.h. die Kette

$$(a_1, b_1) \supset (a_2, b_2) \supset \dots \supset (a_n, b_n)$$

bricht nach endl. vielen Schritten  
mit dem minimalen Element  $(a_n, b_n)$   
ab.

Minimales Element ist  $(1, 1)$ . Für  
ein gegebenes Element  $(a_1, b_1)$  endet  
die absteigende Kette <sup>(Spätestens)</sup>  $(a_1 + b_1 - 2)$   
Schritten beim minimalen  $(1, 1)$ .

Beispiel:  $(3, 2) \supset (3, 1) \supset (2, 1) \supset (1, 1)$   
 $(3, 2) \supset (2, 2)$

$\Rightarrow$  die Ordnung ist fundiert.

Durchführung der Induktion

Induktionsanfang: Zu zeigen  $\text{ggT}(a, b) \neq \perp$   
für alle minimalen Elemente, minimale  
Elemente  $(a, b)$  mit  $a=b$ ;

$$\Rightarrow \text{ggT}(a, a) = a \neq \perp$$

Induktionsschluss: Induktionshypo-  
these:  $\text{ggT}(a, b) \neq \perp$  für alle  $(a', b')$  mit  
 $(a', b') \in (a, b)$ .

I.  $a > b$ : Dann ist  $(a, b)$  nicht minimal.

$$\Rightarrow \text{ggT}(a, b) \stackrel{\text{Def.}}{=} \text{ggT}(\underbrace{a-b, b}_{(a', b')})$$

Da  $(a-b, b) \in (a, b)$  (denn  $a-b+b=a$  ③  
 und  $a < a+b$ ) folgt gemäß der IH.  
 $\text{ggT}(a-b, b) \neq 1 \Rightarrow \text{ggT}(a, b) \neq 1$

II  $a < b$ : analog ...

## Klausur

### Aufgabe 4

$$\text{div}(K, n) = \exists m \in \mathbb{N}_0 : m \cdot k = n$$

$$\text{div}_I(K, n) = \begin{cases} \text{true} & n = 0 \\ \text{false} & 0 < n < k \\ \text{div}_I(K, n-k) & n \geq k \end{cases}$$

Zu zeigen:

$$\text{div}_I(K, n) = \text{div}(K, n)$$

Induktionsanfang:

$$n=0 : \text{div}_I(K, 0) = \text{true}$$

$$\text{div}(K, 0) = \exists m \in \mathbb{N}_0 : m \cdot k = 0$$

mit  $m=0$

$$\Rightarrow \text{div}(K, 0) = \text{div}_I(K, 0) \quad \checkmark$$

$$0 < n < k : \text{div}_I(K, n) = \text{false}$$

$$\text{div}(K, n) = \exists m \in \mathbb{N}_0 : m \cdot k = n; \text{ es}$$

$$0 < \frac{n}{k} < 1$$

gibt kein derartiges  $m$ :

$$\Rightarrow \text{div}(K, n) = \text{false} \quad \checkmark$$

# Induktionsschluss:

(9)

Induktionshypothese:

$$\operatorname{div}(k, n) = \operatorname{div}_y(k, n) \text{ für alle } n' < n+k$$

Betrachte

$$\operatorname{div}_y(k, n+k) \stackrel{\text{Def}}{=} \operatorname{div}_y(k, n)$$

$$\stackrel{IH}{=} \operatorname{div}(k, n)$$

$$= \exists m \in \mathbb{N}_0 : m \cdot k = n$$

$$= \exists m \in \mathbb{N}_0 : m \cdot k + k = n + k$$

$$= \exists m \in \mathbb{N}_0 : k \cdot (m+1) = n + k$$

$$= \exists m' \in \mathbb{N}_0 : k \cdot m' = n + k$$

$$= \operatorname{div}(k, n+k)$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}_y(k, n+k) = \operatorname{div}(k, n+k)$$